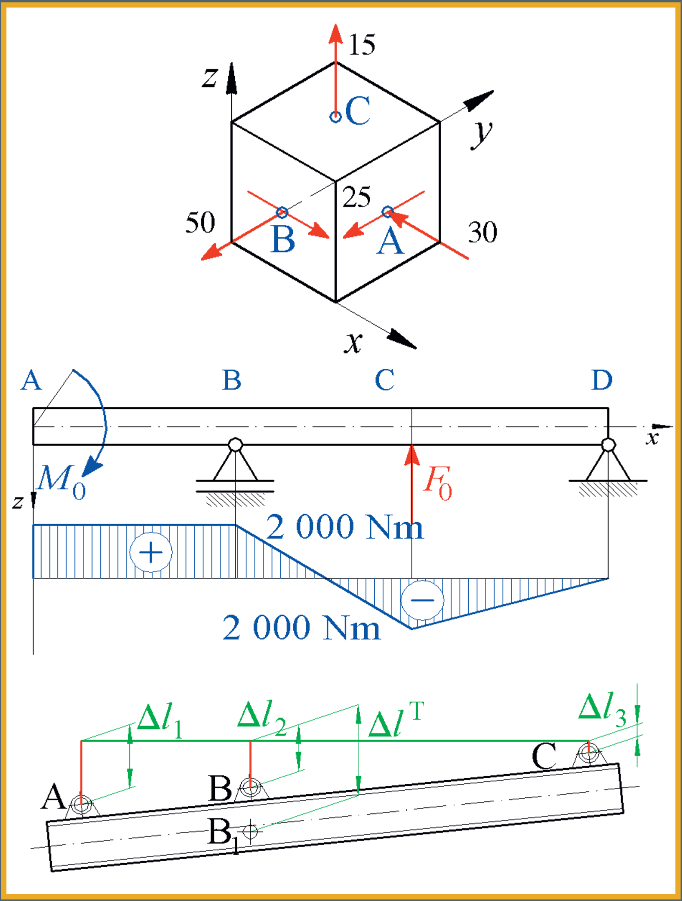
VELEUČILIŠTE U KARLOVCU
Odjel strojarstva



ZBIRKA RIJEŠENIH ZADATAKA IZ ČVRSTOĆE I

Josip Hoster

Josip Hoster

VELEUČILIŠTE U KARLOVCU

STROJARSKI ODJEL

ZBIRKA RIJEŠENIH ZADATAKA IZ ČVRSTOĆE I

ZBIRKA RIJEŠENIH ZADATAKA IZ ČVRSTOĆE I

Izdavač:
Veleučilište u Karlovcu

Za izdavača:
Ivan Štedul, v. pred.

Recenzenti:
doc. dr. sc. Tihomir Mihalić,
doc. dr. sc. Ivica Skozrit

Lektura:
Maja Kličarić, prof.

Grafičko oblikovanje i tisak:
Tiskara Pečarić i Radočaj d. o. o.

ISBN (*online*) *978-953-8213-26-7*

Objavljivanje ovog materijala odobrilo je Povjerenstvo za izdavačku djelatnost Veleučilišta u Karlovcu Odlukom o izdavanju publikacije br. 7.5-13-2021-5

Josip Hoster

Zbirka riješenih zadataka iz Čvrstoće I

Veleučilište u Karlovcu, 2024.

SADRŽAJ

Popis oznaka

Oznaka, mjerna jedinica	Opis
a, mm	duljina dijela nosača, karakteristični radijus prijelaza mjerodavan za zareznu osjetljivost za neki materijal
A, mm^2	ploština poprečnog presjeka nosača
b, mm	širina profila, širina poprečnog presjeka
c, mm	duljina dijela nosača
C, mm	konstanta integracije
C_1, mm^{-3}	konstanta nakon prvog koraka integracije
C_2, mm^{-2}	konstanta nakon drugog koraka integracije
C_3, mm^{-1}	konstanta nakon trećeg koraka integracije
C_4, mm	konstanta nakon četvrtog koraka integracije
d, mm	promjer osovine, vratila, duljina dijela nosača
d_u, mm	unutrašnji promjer cijevi
$\mathrm{d}s$, mm	diferencijal lučne mjere duljine
$\mathrm{d}U$, J	diferencijal unutrašnje energije
$\mathrm{d}V$, m^3	diferencijal volumena
$\mathrm{d}w$, mm	diferencijal progiba
$\mathrm{d}W$, J	diferencijal rada
$\mathrm{d}x$, mm	diferencijal koordinate
$\mathrm{d}y$, mm	diferencijal koordinate
$\mathrm{d}z$, mm	diferencijal koordinate
$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$	derivacija progiba, nagib tangente
$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}$	druga derivacija progiba, zakrivljenost krivulje
D, mm	promjer remenice, tarenice, vanjski promjer cijevi
D_1, mm	promjer remenice 1
D_2, mm	promjer remenice 2
da, rad	diferencijal kuta
e, mm	udaljenost težišnice presjeka od pravca djelovanja sile

Oznaka, mjerna jedinica	Opis
E, N/mm^2	modul elastičnosti
f_s	faktor sigurnosti pri dinamičkom naprezanju
f_1	funkcija ovisnosti najmanjeg dopuštenog naprezanja o srednjem naprezanju
f_2	funkcija ovisnosti najvećeg dopuštenog naprezanja o srednjem naprezanju
F, N	sila
$F(t)$, N	vremenski promjenjiva sila
F_a, N	amplituda vremenski promjenjive sile (pri dinamičkom opterećenju)
F_B, N	sila na mjestu B na nosaču
F_{dop}, N	dopuštena sila pri izvijanju štapa
F_{kr}, N	kritična sila pri izvijanju štapa
F_m, N	srednja vrijednost vremenski promjenjive sile (pri dinamičkom opterećenju)
$\left(F_o\right)_1$, N	obodna sila na remenici 1
$\left(F_o\right)_2$, N	obodna sila na remenici 2
F_R, N	reaktivna sila pri izvijanju štapa uslijed temperaturnog širenja
F_z, N	sila na pravcu osi z
F_0, N	sila koja djeluje na nosač
F_1, N	sila koja djeluje na štap
F_2, N	sila koja djeluje na štap
F_A^y, N	reakcija u ležaju A na pravcu osi y
F_A^z, N	reakcija u ležaju A na pravcu osi z
F_D^y, N	reakcija u ležaju D na pravcu osi y
F_D^z, N	reakcija u ležaju D na pravcu osi z
F_{Az}^*, N	fiktivna reakcija na analognom nosaču u osloncu A na pravcu osi z

Oznaka, mjerna jedinica	Opis
h, mm	visina presjeka nosača
i_{min}, mm	minimalni radijus tromosti poprečnog presjeka nosača, štapa
I, mm^4	aksijalni moment tromosti površine poprečnog presjeka nosača
I_{min}, mm^4	minimalni aksijalni moment tromosti površine poprečnog presjeka nosača, štapa
I_y, mm^4	aksijalni moment tromosti površine poprečnog presjeka nosača, štapa, prema osi y
I_p, mm^4	polarni moment tromosti površine poprečnog presjeka štapa
k_1	faktor površinske hrapavosti za dinamičku čvrstoću
k_2	faktor veličine presjeka za dinamičku čvrstoću
l, mm	duljina štapa pri izvijanju
l_0, mm	slobodna duljina izvijanja
L, mm	duljina nosača
L_1, mm	duljina ravnog dijela nosača
L_2, mm	duljina ravnog dijela nosača
M, Nmm	moment savijanja na štapu
M_B, Nmm	moment savijanja oko osi y na štapu u točki B
$M_{B,ret}$, Nmm	rezultirajući moment savijanja oko osi y na štapu na presjeku B
M_C, Nmm	moment savijanja oko osi y na štapu u točki C
M_0, Nmm	moment savijanja na nosaču
$M_{rez,1}$, Nmm	rezultirajući moment savijanja oko osi y na štapu na presjeku 1
$M_{rez,2}$, Nmm	rezultirajući moment savijanja oko osi y na štapu na presjeku 2
M_T, Nmm	moment uvijanja
M_y, Nmm	moment savijanja oko osi y u štapu
M_{y1}, Nmm	moment savijanja oko osi y u štapu na presjeku 1
M_{y2}, Nmm	moment savijanja oko osi y u štapu na presjeku 2
M_z, Nmm	moment savijanja oko osi z u štapu
M_{z1}, Nmm	moment savijanja oko osi z u štapu na presjeku 1
M_{z2}, Nmm	moment savijanja oko osi z u štapu na presjeku 2
M_{y3}^{A}, Nmm	moment savijanja oko osi y prema točki A na dijelu konstrukcije 3

Oznaka, mjerna jedinica	Opis
M_{z3}^{A}, Nmm	moment savijanja oko osi z prema točki A na dijelu konstrukcije 3
M_{s}^{A}, Nmm	moment savijanja u točki A
M_{s}^{C}, Nmm	moment savijanja u točki C
M_{T}^{C}, Nmm	moment uvijanja u točki C
M_{ekv}^{C}, Nmm	ekvivalentni moment u točki C
M_{s}^{a}, Nmm	amplituda momenta savijanja pri dinamičkom naprezanju
M_{T}^{a}, Nmm	amplituda momenta uvijanja pri dinamičkom naprezanju
M_{s}^{m}, Nmm	srednja vrijednost momenta savijanja pri dinamičkom naprezanju
M_{T}^{m}, Nmm	srednja vrijednost momenta uvijanja pri dinamičkom naprezanju
M^{*}, mm	fiktivni moment na analognom nosaču
M_{A}^{*}, mm	fiktivni moment na analognom nosaču u točki A
M_{B}^{*}, mm	fiktivni moment na analognom nosaču u točki B
n	broj poluvalova sinusiode
n, min^{-1}	brzina vrtnje rotora
N	broj ciklusa opterećenja pri dinamičkom naprezanju
p, Pa	tlak fluida u cijevi
P, W	snaga koju prenosi vratilo
r	faktor asimetričnosti ciklusa naprezanja pri dinamičkom naprezanju
r, mm	prijelazni radijus na štapu pri dinamičkom naprezanju, udaljenost od neutralne osi pri savijanju
r_1, mm	radijus remenice 1
r_2, mm	radijus remenice 2
R_t, mm	visina brazde na površini obrađenog dijela

Oznaka, mjerna jedinica	Opis
q	faktor zarezne osjetljivosti materijala pri dinamičkom naprezanju
q_z, N/mm	raspodijeljeno opterećenje na nosaču
q_0, N/mm	zadana vrijednost raspodijeljenog opterećenja na nosaču
q^*, mm^{-1}	raspodijeljeno opterećenje analogne grede
Q_z, N	poprečna sila na presjeku nosača
Q^*	poprečna fiktivna sila analogne grede
Q^*_{Az}	poprečna fiktivna sila u točki A analogne grede na presjeku
Q^*_B	poprečna fiktivna sila u točki B analogne grede na presjeku
s, mm	krivocrtna duljinska mjera, debljina stijenke cijevi
S	faktor sigurnosti pri izvijanju
t, s	vrijeme
T, Nmm	moment uvijanja na štapu
U, J	energija deformiranja
U_{0d}, J	gustoća energije deformiranja
V, m^3	volumen
w, mm	progib nosača
w_A, mm	progib nosača u točki A
w_{max}, mm	najveći progib nosača
$w_B^{q_0}$, mm	progib nosača u točki B uslijed djelovanja raspodijeljenog opterećenja q_0
w_B^F, mm	progib nosača u točki B uslijed djelovanja sile F
w_B^M, mm	progib nosača u točki B uslijed djelovanja sprega M
W, J	rad naprezanja na elementarnom volumenu materijala
W, mm^3	aksijalni moment otpora poprečnog presjeka nosača
W_p, mm^3	polarni moment otpora poprečnog presjeka nosača
z, mm	koordinata u Descarteovom koordinatnom sustavu
x, mm	koordinata u Descarteovom koordinatnom sustavu
y, mm	koordinata u Descarteovom koordinatnom sustavu

Oznaka, mjerna jedinica	**Opis**
α	kut zakreta tangente na elastičnu liniju
α , K^{-1}	koeficijent temperaturnog širenja materijala
α_{max}	najveći kut zakreta tangente na elastičnu liniju
α_{k}	faktor koncentracije naprezanja
$\alpha_{\mathrm{k,ef}}$	efektivni faktor koncentracije naprezanja
$\alpha_{\mathrm{k,t}}$	teorijski, geometrijski faktor koncentracije naprezanja
α_{A}	kut zakreta tangente na elastičnu liniju u točki A
α_{B}	kut zakreta tangente na elastičnu liniju u točki B
$\alpha_{\mathrm{B}}^{q_0}$	kut zakreta tangente na elastičnu liniju u točki B uslijed djelovanja raspodijeljenog opterećenja q_0
α_{B}^{F}	kut zakreta tangente na elastičnu liniju u točki B uslijed djelovanja sile F
α_{B}^{M}	kut zakreta tangente na elastičnu liniju u točki B uslijed djelovanja sprega M
γ_{xy}	kutna deformacija
γ_{yz}	kutna deformacija
γ_{zx}	kutna deformacija
ΔF , N	promjena sile
ΔL^{F} , mm	promjena duljine štapa uslijed djelovanja sile
ΔL^{ϑ} , mm	promjena duljine štapa uslijed promjene temperature
$\Delta \vartheta$, °C	promjena temperature
ε_{x}	duljinska deformacija u smjeru osi x
ε_{y}	duljinska deformacija u smjeru osi y

Oznaka, mjerna jedinica	Opis
ε_z	duljinska deformacija u smjeru osi z
$\varepsilon_{\mathrm{dop}}$	dopuštena duljinska deformacija
ϑ, °C	relativna temperatura u stupnjevima Celzijusa
κ, $\mathrm{m^{-1}}$	zakrivljenost elastične linije nosača
λ	vitkost štapa pri izvijanju
λ_{p}	granična vitkost štapa pri izvijanju pri granici elastičnosti (Eulerova hiperbola)
λ_{T}	granična vitkost štapa pri izvijanju na granici Tetmayerovog pravca
ν	Poissonov faktor
ρ, m	radijus zakrivljenosti elastične linije nosača
σ_{a}, $\mathrm{N/mm^2}$	amplituda dinamičkog naprezanja
σ_{dop}, $\mathrm{N/mm^2}$	dopušteno naprezanje
σ_{e}, $\mathrm{N/mm^2}$	naprezanje pri granici elastičnosti (plastičnog tečenja)
σ_{ekv}, $\mathrm{N/mm^2}$	ekvivalentno naprezanje pri složenom stanju naprezanja
σ_{kr}, $\mathrm{N/mm^2}$	kritično naprezanje pri izvijanju štapa
σ_{m}, $\mathrm{N/mm^2}$	srednja vrijednost dinamičkog naprezanja
σ_{M}, $\mathrm{N/mm^2}$	statička čvrstoća (pri rastezanju, „vlačna” čvrstoća)
σ_{max}, $\mathrm{N/mm^2}$	najveće naprezanje, najveće dinamičko naprezanje
σ_{min}, $\mathrm{N/mm^2}$	najmanje dinamičko naprezanje
σ_{p}, $\mathrm{N/mm^2}$	naprezanje (granica) proporcionalnosti
σ_{T}, $\mathrm{N/mm^2}$	naprezanje na granici Tetmayerovog pravca pri izvijanju štapa

Oznaka, mjerna jedinica	Opis
σ_x , N/mm^2	normalna komponenta naprezanja u smjeru osi x
σ_y , N/mm^2	normalna komponenta naprezanja u smjeru osi y
σ_z , N/mm^2	normalna komponenta naprezanja u smjeru osi z
σ_0 , N/mm^2	karakteristično naprezanje pri izvijanju štapa
σ_1 , N/mm^2	najveće glavno naprezanje
σ_2 , N/mm^2	srednje glavno naprezanje
σ_3 , N/mm^2	najmanje glavno naprezanje
$\sigma_{\mathrm{a,ekv}}$, N/mm^2	amplituda ekvivalentnog naprezanja pri dinamičkom naprezanju
$\sigma_{\mathrm{m,ekv}}$, N/mm^2	srednja vrijednost ekvivalentnog naprezanja pri dinamičkom naprezanju
$\sigma_{x\mathrm{B,max}}$, N/mm^2	najveće normalno naprezanje u točki B
$_{-1}$, N/mm^2	dinamička (trajna) čvrstoća za izmjenični ciklus naprezanja
$\sigma^{\mathrm{d}}_{\mathrm{r}(N)}$, N/mm^2	vremenska čvrstoća za ciklus faktora asimetričnosti „r”, pri „N” ciklusa naprezanja
$\sigma^{\mathrm{d,x}}_{\mathrm{r}}$, N/mm^2	dinamička (trajna) čvrstoća za ciklus faktora asimetričnosti „r”, za „x” vrstu (oblik) opterećenja
$\sigma^{\mathrm{B}}_{\mathrm{ekv,\ NPN}}$, N/mm^2	ekvivalentno naprezanje u točki B prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja
$\sigma^{\mathrm{d,x}}_{\mathrm{r,dop}}$, N/mm^2	dopušteno najveće naprezanje za ciklus faktora asimetričnosti „r”, za „x” vrstu (oblik) opterećenja
$\left(\sigma^1_x\right)^{\mathrm{a}}$, N/mm^2	normalno naprezanje na prvom dijelu štapa
$\left(\sigma^2_x\right)^{\mathrm{a}}$, N/mm^2	normalno naprezanje na drugom dijelu štapa
$\left(\sigma^3_x\right)^{\mathrm{a}}$, N/mm^2	normalno naprezanje na trećem dijelu štapa

Oznaka, mjerna jedinica	Opis
$\left(\sigma_x^1\right)'_{\max}$, N/mm^2	najveće normalno naprezanje na prvom dijelu štapa samo uslijed savijanja
$\left(\sigma_x^1\right)'_{\min}$, N/mm^2	najmanje normalno naprezanje na prvom dijelu štapa samo uslijed savijanja
$\left(\sigma_x^2\right)'_{\max}$, N/mm^2	najveće normalno naprezanje na drugom dijelu štapa samo uslijed savijanja
$\left(\sigma_x^2\right)'_{\min}$, N/mm^2	najmanje normalno naprezanje na drugom dijelu štapa samo uslijed savijanja
$\left(\sigma_x^1\right)_{\max}$, N/mm^2	najveće normalno naprezanje na prvom dijelu štapa
$\left(\sigma_x^1\right)_{\min}$, N/mm^2	najmanje normalno naprezanje na prvom dijelu štapa
$\left(\sigma_x^2\right)_{\max}$, N/mm^2	najveće normalno naprezanje na drugom dijelu štapa
$\left(\sigma_x^2\right)_{\min}$, N/mm^2	najmanje normalno naprezanje na drugom dijelu štapa
σ_φ, N/mm^2	cirkularno (u „kružnom” smjeru) naprezanje u stijenci cijevi
$\tau_{\max}$, N/mm^2	najveće posmično naprezanje uslijed uvijanja (torzije)
$\tau_{\mathrm{TB,max}}$, N/mm^2	najveće posmično naprezanje uslijed uvijanja (torzije) u točki B
τ_{xy}, N/mm^2	posmična komponenta naprezanja
τ_{yz}, N/mm^2	posmična komponenta naprezanja
τ_{zx}, N/mm^2	posmična komponenta naprezanja
ω, m^{-1}	karakteristična veličina jednadžbe ravnoteže pri izvijanju štapa
Ω, s^{-1}	kružna frekvencija uzbudne sile pri dinamičkom naprezanju

PREDGOVOR

Ova je zbirka nastala na osnovi plana kolegija Čvrstoća I iz 2020. godine koji se izvodi na Veleučilištu u Karlovcu. Iz sada već više od desetljeća autorova iskustva u nastavi kolegija Čvrstoća I proizlazi skup primjera kao, nadam se, najveća pomoć studentima u svladavanju sadržaja kolegija, ili bolje rečeno, svladavanju osnova čvrstoće elastičnih tijela (štapova). Teorijske podloge dostupne su u mnogim izdanjima, i to profesora (nastavnika) s Fakulteta strojarstva i brodogradnje (FSB) Sveučilišta u Zagrebu, Strojarskog fakulteta u Slavonskom Brodu Sveučilišta u Osijeku, Tehničkog fakulteta u Rijeci i dr. Odabir pojedinih poglavlja prilagođen je planu kolegija Čvrstoća I koji autor predaje na Veleučilištu u Karlovcu. Značajan utjecaj na nastajanje i pisanje ove zbirke je autorovo iskustvo u nastavi na Katedri za mehaniku i čvrstoću Fakulteta strojarstva i brodogradnje u Zagrebu i na Veleučilištu u Karlovcu. Suradnja sa svim nastavnicima Katedre za mehaniku i čvrstoću i Zavoda za tehničku mehaniku Fakulteta strojarstva i brodogradnje uvelike je doprinijela nastavnoj djelatnosti autora, a time i nastajanju ove zbirke.

U zbirci su ukratko opisane teorijske osnove prije samog opisa rješavanja primjera. Obuhvaćena su sljedeća poglavlja čvrstoće: naprezanje – komponente i glavna naprezanja, Hookeov zakon za homogene i izotropne materijale, temperaturne deformacije, jednostavni štapovi opterećeni uzdužnim centričnim silama (aksijalno opterećeni), štapne statički neodređene konstrukcije, uvijanje (torzija) štapova okruglog presjeka i savijanje tankih štapova (nosača). Primjeri se konceptualno oslanjanju na udžbenik i nastavu prof. dr. sc. Ive Alfirevića, no opseg sadržaja je smanjen i prilagođen planu kolegija Čvrstoća I koji se izvodi na Veleučilištu u Karlovcu. Numerički primjeri osmišljeni su tako da posluže čitatelju za provjeru usvojenih teorijskih postavki u pojedinom poglavlju. Želim istaknuti kako je temelj ili nužni uvjet za svladavanje principa i spoznaja čvrstoće poznavanje teorijskih osnova mehanike krutih tijela, drugim riječima, statike. Podrazumijeva se da čitatelj može samostalno izračunati i nacrtati dijagram (raspodjelu) uzdužne sile, momenata uvijanja i savijanja za jednostavne štapove.

U prvom poglavlju *Naprezanje - komponente i glavna naprezanja* prikazano je označavanje komponenata naprezanja i crtanje komponenata naprezanja na elementarnu prizmu materijala, infinitezimalni volumen. Prikazan je kratki opis značenja transformacije komponenata naprezanja rotacijom koordinatnog sustava te traženje ekstremnih normalnih komponenata – glavnih naprezanja.

U prikazanim numeričkim primjerima obrađeno je prepoznavanje komponenata naprezanja nacrtanih na prizmi, zapisivanje u obliku matrice, crtanje komponenata naprezanja na prizmu iz brojčano zadanih, određivanje transformiranih komponenata naprezanja te je obrađen i izračun glavnih naprezanja za dvoosno i troosno stanje naprezanja.

U drugom poglavlju *Hookeov zakon za homogene i izotropne materijale* prikazane su jednadžbe ovisnosti komponenata naprezanja o komponentama deformacije. Prikazani su numerički primjeri deformiranja elastičnih blokova u krutoj okolini (kalupu) prizmatičnog i cilindričnog oblika koji se deformiraju (popunjavaju kalup) uslijed djelovanja vanjske sile. Prikazan je primjer temperaturnog širenja (dilatacije) elastične prizme u krutom kalupu.

U trećem poglavlju *Momenti tromosti (inercije) površine – geometrijske karakteristike presjeka* prikazana je teorijska osnova izračuna aksijalnih, devijacijskog i polarnog momenta tromosti površine. Ukratko je opisan značaj Steinerovog dodatka. Opisano je izračunavanje glavnih težišnih momenata tromosti presjeka. U numeričkim primjerima prikazani su proračuni glavnih težišnih momenata tromosti presjeka dobivenih od jednostavnih geometrijskih likova (kao zbroj i razlika) te standardnih vruće valjanih profila.

U četvrtom poglavlju *Aksijalno (uzdužno) opterećeni štapovi* opisan je način izračunavanja deformiranja štapova opterećenih centričnim uzdužnim silama te temelj dimenzioniranja štapova. U numeričkim primjerima prikazani su proračuni promjena duljina, dimenzioniranja štapova te proračun deformiranja nelinearnog ponašanja uslijed geometrije pri deformiranju štapova.

U petom poglavlju *Statički neodređeni osno opterećeni štapovi* prikazana je primjena principa superpozicije pri određivanju reakcija statički neodređenih štapova. Prikazan je proračun dimenzioniranja statički neodređenih štapova konstantnog i stupnjevanog presjeka te proračun toplinski opterećenog štapa.

U šestom poglavlju *Štapne konstrukcije* prikazan je proračun sila u štapovima koji čine statički neodređen sustav s krutom gredom. Prikazani su primjeri opterećenja grede silom, s tri štapa i opterećenje jednog od štapova toplinom. Prikazana su montažna naprezanja u trenutku kada je jedan od štapova prekratak te primjer spoja štapova na gredu pod kutom različitim od 90° .

U sedmom poglavlju *Uvijanje štapova okruglog presjeka* prikazan je proračun deformiranja i naprezanja u štapovima okruglog presjeka. Prikazani su primjeri izračuna kuta zakreta štapa konstantnog i stupnjevanog presjeka te dimenzioniranje takvih štapova. Prikazana je primjena principa superpozicije pri određivanju reakcije uklještenja statički neodređenog štapa te primjeri dimenzioniranja statički neodređenih štapova i vratila koje prenosi snagu s tri elementa prijenosa snage i gibanja. Primijenjeni su kriteriji čvrstoće i krutosti pri dimenzioniranju.

U osmom poglavlju *Savijanje tankih ravnih štapova* prikazan je proračun raspodjele normalne i posmične komponente naprezanja u presjeku štapova (nosača). Prikazani su primjeri dimenzioniranja konzole, greda s prepustom i nosača s Gerberovim zglobom te su opisani kriteriji i postupak optimiziranja presjeka na primjeru konzole.

Nakana je ovih podloga za predavanja i vježbe olakšavanje studentima, prvenstveno studentima Veleučilišta u Karlovcu, praćenje nastave iz kolegija Čvrstoća I, poticanje samostalnog učenja te usvajanje gradiva i primjenu teorijskih postavki u dimenzioniranju jednostavnih štapova po geometriji i opterećenju. Riješeni će primjeri olakšati svladavanje gradiva te potaknuti na provjeru usvojenih znanja.

Ovom prigodom želim zahvaliti matičnoj instituciji, Veleučilištu u Karlovcu, prvenstveno bivšoj dekanici dr. sc. Nini Popović, prof. v. š. i sadašnjem dekanu Ivanu Štedulu, v. pred., na potpori u nastanku i promicanju ovog izdanja. Zahvaljujem mentoru svoga doktorskog rada prof. dr. sc. Jurici Soriću koji mi je značajno pomogao oblikovati nastavnu i znanstvenu djelatnost. Zahvaljujem i svim kolegicama i kolegama s Katedre za mehaniku i čvrstoću Zavoda za tehničku mehaniku Fakulteta strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu te Strojarskog odjela Veleučilišta u Karlovcu na savjetima, potpori i pomoći.

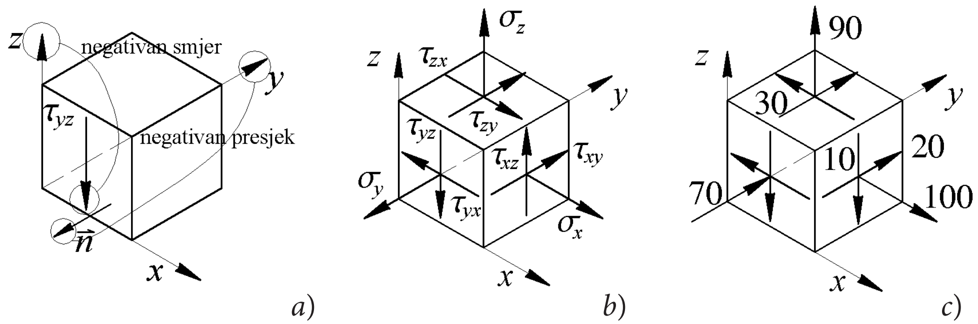
Autor

1. NAPREZANJE – KOMPONENTE I GLAVNA NAPREZANJA

Temelj čvrstoće u cilju konstruiranja dijelova strojeva, konstrukcija i dr. je pojam naprezanja. Za početak, jedan od osnovnih pojmova u mehanici elastičnih tijela (čvrstoći) je ***opterećenje***, što možemo opisati kao posljedicu međudjelovanja promatranog tijela (nosača, štapa,…) i njegove okoline, što crtamo u skicama kao sile, momente (spregove) i raspodijeljena opterećenja, koja podrazumijevaju i pritisak i tlak. Nadalje, ***naprezanje***, kao najbitniji pojam čvrstoće, je mjera promjene početnog stanja u strukturi materijala, ili promatrano kroz prizmu fizike, promjena prosječnog razmaka između atoma kao posljedice promjene geometrije uslijed opterećenja, odnosno, naprezanje je zamišljena veličina koju ne mjerimo izravno, već je opisujemo pomoću devet (9) komponenata kako bismo jednoznačno utvrdili naprezanje u nekoj „točki" materijala za promatrano opterećenje. To je povezano na tri međusobno okomita presjeka koja okružuju promatranu točku materijala, na kojima upisujemo jednu normalnu i dvije posmične komponente naprezanja koje uravnotežuju vanjsko opterećenje. Ista je logika, ili pravilo, označavanja predznaka i komponenti naprezanja na presjecima kao i za unutrašnje veličine u presjeku štapa u Mehanici 1 (statici), N_x, Q_z, M_y i za ostale tri koje rijetko računamo. Predznak presjeka i predznak strelice komponente naprezanja određuju predznak te komponente. Ovo će biti objašnjeno u narednom primjeru.

1.1. Određivanje predznaka komponenata naprezanja

U svakoj točki materijala potrebno je prikazati (izračunati) ukupno devet komponenata naprezanja na tri međusobno okomita presjeka. Predznak pojedine komponente određen je umnoškom predznaka presjeka koji je vezan za prvi indeks u oznaci naprezanja, s predznakom smjera strelice te komponente naprezanja.



Slika 1.1. Opisivanje komponenata naprezanja: a) određivanja predznaka, b) pozitivne komponente i c) primjer komponenata

Prema slici 1.1.a) određujemo komponentu naprezanja na presjeku koji ima normalu (označenu $\vec{n}$), odnosno koji čini presjek s normalom na pravcu osi *y*. Pravac djelovanja strelice naprezanja paralelan je osi *z*. Smjer te strelice suprotan je smjeru osi *z*. Predznak normale je negativan, ali je i predznak strelice negativan, pa kada se pomnože dobije se pozitivan predznak te komponente. Indeksi za tu komponentu su: prvi za presjek, *y*, a drugi za pravac strelice, *z*, pa ovu komponentu označavamo τ_{yz} . Na temelju toga, pozitivne komponente na tri međusobno okomita presjeka prikazane su na slici 1.1.b). Prema Maxwellovom teoremu (Alfirević, I.: Nauka o čvrstoći 1, Tehnička knjiga, Zagreb, 1995.) posmične komponente (   ) u parovima po indeksima su jednake, tj. $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$. Komponente naprezanja zapisujemo u obliku matrice prema:

$$[\sigma]_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Za primjer prema slici 1.1.c) sve komponente naprezanja prikazane su bez mjerne jedinice pa se podrazumijeva da imaju mjernu jedinicu MPa. Na pozitivnom presjeku *x*, na kojem je normalna komponenta naprezanja usmjerena kao i pozitivna, os *x* je pozitivna, i ima iznos 100, pa pišemo $\sigma_x = 100$ MPa . Posmična komponenta iznosa 20 na tom je presjeku pravcem djelovanja paralelna osi *y* i ima isti smjer strelice kao os *y*, pa je ta komponenta naprezanja $\tau_{xy} = 20$ MPa , a druga posmična komponenta iznosa 10 ima pravac djelovanja paralelno osi *z* i ima suprotni smjer strelice kao os *z*, pa je ta komponenta naprezanja $\tau_{xz} = -10$ MPa .

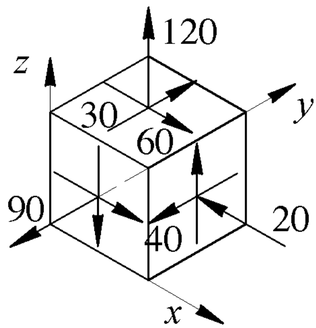
Na ostala dva presjeka komponente naprezanja su: $\sigma_y = -70$ MPa, $\tau_{yz} = 30$ MPa i $\sigma_z = 90$ MPa. Sada možemo popisati sve komponente naprezanja u obliku matrice:

$$[\sigma]_{ij} = \begin{bmatrix} 100 & 20 & -10 \\ 20 & -70 & 30 \\ -10 & 30 & 90 \end{bmatrix} \text{MPa.} \tag{2}$$

Za „obrnuto" određivanje komponenata naprezanja iz zadane matrice ili popisa komponenata naprezanja nacrtat ćemo elementarni volumen sa strelicama, oznakama osi i brojevima, tj. iznosima naprezanja. Zadano je stanje naprezanja prema:

$$[\sigma]_{ij} = \begin{bmatrix} -20 & -40 & 60 \\ -40 & 90 & 30 \\ 60 & 30 & 120 \end{bmatrix} \text{MPa.} \tag{3}$$

Rješenje je prikazano na slici 1.2. Komponente naprezanja možemo ucrtati kao pozitivne i negativne presjeke, ovisno o odabranom prostornom prikazu elementarne prizme materijala.

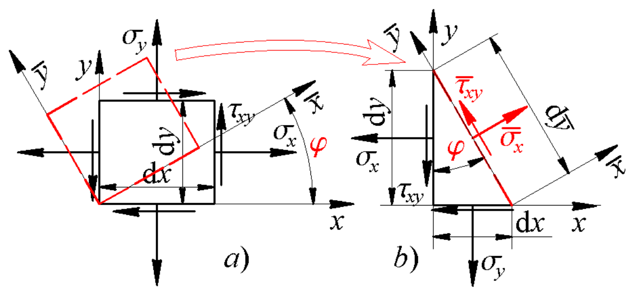


Slika 1.2. Komponente naprezanja prema

1.2. Određivanje komponenata naprezanja u zarotiranom koordinatnom sustavu. Mohrova kružnica naprezanja

Kako za normalnu i posmičnu komponentu naprezanja možemo izračunati za presjek štapa pod kutom prema poprečnom presjeku, uz isto vanjsko opretećenje tako i za proizvoljna tri presjeka možemo izračunati komponente $\overline{\sigma}_{ij}$ u novom koordinatnom sustavu $O\overline{xyz}$ nastalom rotiranjem oko ishodišta starog sustava. Radi lakšeg predočavanja toga postupka, ali i zbog dovoljno čestih slučajeva u praksi, kada je na trećem presjeku samo normalna komponenta naprezanja, što pojednostavljuje preračunavanje, prikazat ćemo stari i novi koordinatni sustav u ravnini (slika 1.3.).

Na slici 1.3.a) prikazan je elementarni volumen dxdydz projiciran na ravninu Oxy s ucrtanim komponentama naprezanja. Ako bismo željeli naći koje bi komponente djelovale na elementarnom volumenu u zakrenutom koordinatnom sustavu $O\overline{xyz}$ (tj. u ovom pogledu zarotirani presjek oko osi z), koji je prikazan na slici 1.3.a) crvenom isprekidanom crtom, trebali bismo ih izračunati iz ravnoteže sila koje djeluju na taj volumen prema slici 1.3.b). Presjek u zarotiranom sustavu ima komponente naprezanja $\overline{\sigma}_x, \overline{\tau}_{xy}$ koje uravnotežuju djelovanje komponenata naprezanja koje djeluju na presjecima u starom koordinatnom sustavu. Promatranjem uvjeta ravnoteže dobit ćemo jednadžbe za $\overline{\sigma}_x, \overline{\tau}_{xy}$, dok je za $\overline{\sigma}_y$ analogno, samo s presjekom zakrenutim za 90° prema presjeku označenom osi $\overline{x}$, što će ovdje biti izostavljeno.



Slika 1.3. Transformacija naprezanja u ravnini Oxy:
a) zakretanje koordinatnog sustava u ravnini i
b) ravnoteža sila na presjecima u starom i novom koordinatnom sustavu

Prvo ćemo postaviti odnos veličine presjeka i kuta φ prema:

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}\bar{y}\sin(\varphi),\ \mathrm{d}y = \mathrm{d}\bar{y}\cos(\varphi) \Rightarrow \mathrm{d}x / \mathrm{d}\bar{y} = \sin(\varphi),\ \mathrm{d}y / \mathrm{d}\bar{y} = \cos(\varphi). \tag{4}$$

Slijedi jednadžba ravnoteže za pravce osi $\bar{x}$ i $\bar{y}$:

$$\begin{gathered}
\Sigma F_{\bar{x}} = 0 \Rightarrow \bar{\sigma}_x \mathrm{d}\bar{y} = \sigma_x \mathrm{d}y\cos(\varphi) + \sigma_y \mathrm{d}x\sin(\varphi) + \\
\tau_{xy}\left[\mathrm{d}x\cos(\varphi) + \mathrm{d}y\sin(\varphi)\right]. \\
\Sigma F_{\bar{y}} = 0 \Rightarrow \bar{\tau}_{xy} \mathrm{d}\bar{y} = -\sigma_x \mathrm{d}y\sin(\varphi) + \sigma_y \mathrm{d}x\cos(\varphi) + \\
\tau_{xy}\left[\text{-}\mathrm{d}x\sin(\varphi) + \mathrm{d}y\cos(\varphi)\right].
\end{gathered} \tag{5}$$

Jednadžbe ravnoteže sila dalje ćemo preoblikovati uz korištenje geometrijskih odnosa (6) u:

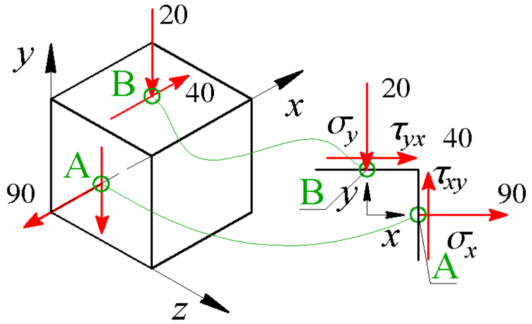
$$\begin{gathered}
\bar{\sigma}_x(\varphi) = \sigma_x \cos^2(\varphi) + \sigma_y \sin^2(\varphi) + 2\tau_{xy} \sin(\varphi)\cos(\varphi), \\
\bar{\tau}_{xy}(\varphi) = -\sigma_x \sin(\varphi)\cos(\varphi) + \sigma_y \sin(\varphi)\cos(\varphi) + \tau_{xy}\left[\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)\right].
\end{gathered} \tag{6}$$

Jednadžbe zajedno predstavljaju jednadžbu kružnice, što je prvi izveo i uveo u praksu Otto Mohr prema kojemu je grafički način transformacije komponenata naprezanja nazvan *Mohrova kružnica naprezanja*. Analogno bismo dobili jednadžbu za izračunavanje (transformiranje) komponente $\bar{\sigma}_y$ postavljanjem jednadžbe ravnoteže sila za okomit presjek koji je prikazan na slici 1.3.b), no ovdje to neće biti prikazano. Komponentu naprezanja $\bar{\sigma}_y$ u zarotiranom koordinatnom sustavu računamo prema:

$$\bar{\sigma}_y(\varphi) = \sigma_x \sin^2(\varphi)\mathrm{d}x + \sigma_y \cos^2(\varphi) - 2\tau_{xy} \sin(\varphi)\cos(\varphi). \tag{7}$$

Primjer 1.1. Određivanje komponenata naprezanja u zarotiranom koordinatnom sustavu

Za stanje naprezanja zadano slikom 1.4. treba odrediti komponente naprezanja u zarotiranom koordinatnom sustavu za 30° oko osi *z* u suprotnom smjeru kazaljke na satu (od osi *x* prema osi *y*).



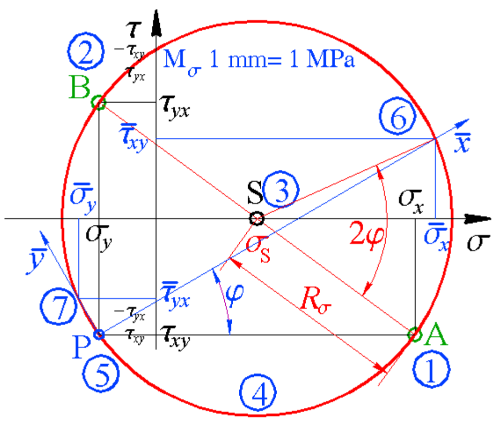
Slika 1.4. Stanje naprezanja na elementarnoj prizmi

S ploha elementarne prizme na kojima su zadane (ucrtane) komponente naprezanja možemo skicirati prvo dvije plohe s normalama koje se podudaraju s osima x i y (na slici 1.4. prikazane su na desnoj strani). To možemo zvati i dvije točke presjeka, A i B. Prema pravilu o predznacima možemo očitati i zapisati da su ucrtane komponente naprezanja $\sigma_x = 90$ MPa, $\sigma_y = -20$ MPa, $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 40$ MPa. Transformirane komponente naprezanja možemo izračunati grafički, Mohrovom kružnicom, ili analitički, jednadžbama (6) i (7).

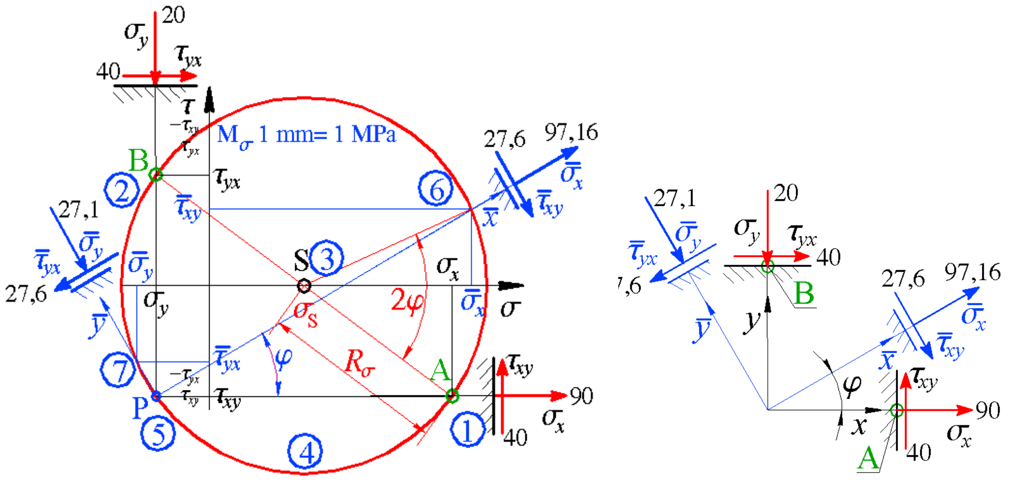
Radi jasnoće i općenitosti, kao rješenje ovog primjera prikazano je i grafičko i analitičko rješenje. Ispitni zadatak nije nužno riješiti na oba načina, iako to osigurava provjeru rješenja, tj. ako su rješenja slična, onda su vjerojatno i točna. Mohrovu kružnicu naprezanja crtamo u koordinatnom sustavu $O\sigma\tau$, a prvi je korak odabir mjerila za naprezanje. Očekujemo kružnicu naprezanja promjera najmanje kao razlika normalnih komponenti, tj. 90 – (-20) = 110, s time da radijus određuju i posmične komponente koje ga povećavaju pa je 110 MPa za početak smjernica za promjer kružnice i odabir mjerila. Kružnicu pokušavamo smjestiti najčešće u A4 format papira, širine 210 mm, s marginama lijevo 25 mm i desno najmanje 10 mm, pa nam ostaje 175 mm za crtanje. Ako za crtanje ostane više od 110 mm promjera i 170 mm širine znači da je mjerilo 1 MPa = 1 mm kao „okrugli" broj primjeren. Nakon odabira mjerila ucrtavamo dvije točke na Mohrovoj kružnici naprezanja koje predstavljaju dva zarotirana presjeka A i B, pod 90°. U jednadžbi za kut zakreta do glavnih osi naprezanja, (13) vidljivo je da izračunavamo dvostruki kut φ_0. U Mohrovoj kružnici naprezanja prilikom crtanja točke na kružnici koja određuje stanje naprezanja u zarotiranom presjeku, ucrtavamo iz središta kružnice dvostruki kut φ, dok crtano iz posebne točke nazvane pol kružnice, crtamo jednostruki kut φ. Dva presjeka na kojima su zadane komponente naprezanja međusobno su zarotirana za 90°, što znači da će u kružnici, gledano iz središta, biti na 180°, tj. na promjeru. Ta nam činjenica pomaže u određivanju središta. Na slici 1.5. prikazana je kružnica i ucrtani su brojevi u kružnicama koji predstavljaju korake, tj. redoslijed crtanja.

Koraci 1 i 2 obuhvaćaju ucrtavanje točaka prema stanju (zadanim komponentama) naprezanja u presjecima A i B. Pravilo za crtanje posmičnih komponenata je da gore crtamo pozitivnu τ_{yx} i negativnu τ_{xy}, a dolje obrnuto. To je naznačeno na vertikalnoj osi. Budući da su te dvije točke na promjeru, presjecište spojnice AB s osi apscisa (vodoravnom) daje nam središte kružnice, a to je korak 3. Nakon toga crtamo kružnicu radijusa SA ili SB, a to je korak 4. Karakteristična točka na kružnici je pol koji dobivamo kao presjecište paralela s normalama na presjeke A i B. Povučemo vodoravnu dužinu iz točke A, jer je to presjek s normalom na osi *x*, do kružnice, pa iz točke B vertikalnu dužinu, jer je normala na presjek B paralelna osi *y*. Te se dvije dužine sijeku (spajaju) na kružnici, što je označeno točkom 5. Iz pola brzina P možemo od osi *x* nacrtati dužinu pod kutom od 30° u smjeru suprotnom smjeru kazaljke na satu, što je označeno točkom 6, a to je os $\overline{x}$, odnosno „iks potez". Točka na kružnici gdje os $\overline{x}$ presjeca kružnicu određuje stanje (komponente) naprezanja u transformiranim koordinatama.

Iz crteža očitavamo i preračunamo komponente $\overline{\sigma}_x \approx 97{,}2$ MPa, $\overline{\tau}_{xy} \approx -27{,}6$ MPa. Os $\overline{y}$ nacrtamo pod 90° prema pravilu desne ruke prema osi $\overline{x}$. Presjecište s kružnicom naprezanja, točka 7, predstavlja drugi presjek, tj. preostale komponente naprezanja koje nakon preračunavanja iznose $\overline{\sigma}_y \approx -27{,}1$ MPa, $\overline{\tau}_{yx} \approx -27{,}6$ MPa. Uobičajeno prikazujemo presjeke s komponentama naprezanja na samoj krunici (slika 1.6.a) ili zasebno (slika 1.6.b).



Slika 1.5. Crtanje (konstrukcija) Mohrove kružnice naprezanja



a) *b)*

Slika 1.6. Prikaz stanja naprezanja: a) na Mohrovoj kružnici i b) zasebno na presjecima

Analitički ćemo izračunati komponente naprezanja uzarotiranom koordinatnom sustavu jednadžbama (6) i (7):

Usporedbom očitanih komponenata naprezanja iz Mohrove kružnice

$$\bar{\sigma}_x(\varphi) = \sigma_x \cos^2(\varphi)\mathrm{d}x + \sigma_y \sin^2(\varphi) + 2\tau_{xy}\sin(\varphi)\cos(\varphi) =$$
$$90\cos^2(30°) - 20\sin^2(30°) + 2\cdot 40\sin(30°)\cos(30°) = 97{,}141 \text{ MPa.}$$
$$\bar{\tau}_{xy}(\varphi) = -\sigma_x \sin(\varphi)\cos(\varphi) + \sigma_y \sin(\varphi)\cos(\varphi) + \tau_{xy}\left[\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)\right] = \qquad (8)$$
$$-90\sin(30°)\cos(30°) - 20\sin(30°)\cos(30°) + 40\left[\cos^2(30°) - \sin^2(30°)\right] = -27{,}631 \text{ MPa.}$$
$$\bar{\sigma}_y(\varphi) = \sigma_x \sin^2(\varphi)\mathrm{d}x + \sigma_y \cos^2(\varphi) - 2\tau_{xy}\sin(\varphi)\cos(\varphi) =$$
$$90\sin^2(30°) - 20\cos^2(30°) - 2\cdot 40\sin(30°)\cos(30°) = -27{,}141 \text{ MPa.}$$

i analitičkih vrijednosti vidljiva je mala razlika. Veličina razlike ili greške ovisi o načinu crtanja, primjerice šestarom, olovkom, ravnalom, računalnim programom za CAD i sl. Veličina razlike ili greške ovisi i o odabranom mjerilu. Što je mjerilo „manje", skica kružnice je manja, a time je veća greška. Greška proizlazi iz debljine crtane linije, očitanja duljine, crtanja i očitanja kuta, točnosti crtanja presjecišta itd. Dodatna provjera izračunatih komponenata naprezanja je svojstvo tenzora naprezanja da ima invarijante, odnosno konstante koje su ovisne o komponentama u bilo kojem koordinatnom sustavu. Prva invarijanta tenzora naprezanja napisana za ravninsko naprezanje (stanje u kojem na 3. plohi, odnosno presjeku, nema komponenata naprezanja) je:

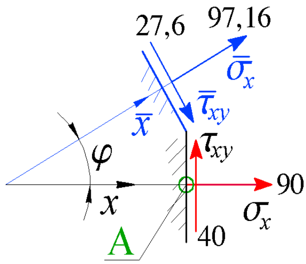
$$I_1^\sigma = \sigma_x + \sigma_y = \bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y = \sigma_1 + \sigma_2. \qquad (9)$$

Prva invarijatna tenzora naprezanja predstavlja konstantni zbroj normalnih komponenata naprezanja, čime provjeravamo izračun transformiranih normalnih komponenata:

$$\sigma_x + \sigma_y = \bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y \Rightarrow 90 - 20 = 70 = 97{,}141 - 27{,}141. \qquad (10)$$

Primjer 1.2. Određivanje komponenata naprezanja na temelju komponenata na dva zakrenuta presjeka.

Za stanje naprezanja zadano slikom 1.7. treba odrediti komponente naprezanja u presjeku s normalom na osi y (σ_y). Zadano je: φ = 30°.



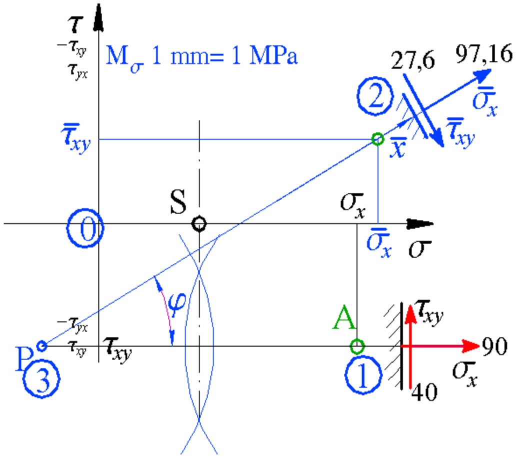
Slika 1.7. Komponente naprezanja u osnovnom i rotiranom koordinatnom sustavu

Za crtanje Mohrove kružnice koristit ćemo A4 format papira. Dvije su značajne vrijednosti koje nas usmjeravaju u odabiru mjerila. Na desnoj strani od ishodišta imat ćemo gotovo 100 MPa, dok se za lijevu stranu zasad ne može tvrditi nešto slično. Presjek označen slovom A, tj. s normalom na pravcu osi *x*, iskoristit ćemo za određivanje načina odabiranja mjerila. Znamo da je pol kružnice na presjecištu kružnice i normale na presjek A, kroz točku A, tj. horizontalne dužine iz točke A. Iz pola bismo nacrtali normalu na zarotirani presjek pod kutom od 30° i na presjecištu s kružnicom dobili podatak o tome kolike su transformirane komponente naprezanja koje su ucrtane plavom bojom na slici 1.7. To bismo koristili za određivanje kružnice „unazad". Poznate su nam dvije točke na kružnici A, nazovimo je A*, koja predstavlja zarotirani presjek. Poznati su nam pravci normala kroz te točke koji se sijeku na kružnici. Znamo još i da je središte kružnice uvijek na osi apscisa, tj. σ.

To su ukupno tri točke na kružnici s određenim „ograničenjima". Na raspolaganju nam je oko 170 mm širine za crtanje. Procjena mjere kružnice slijedi iz pravokutnog trokuta tako da gledamo razliku „visine", tj. razliku τ koordinata i kut normale zarotiranog presjeka. Imamo pravokutni trokut s katetom oko 68 MPa, i kutom hipotenuze prema duljoj (donjoj) kateti od 30°, što daje da je donja kateta oko

$$\tan(30°) = \Delta\tau_{\mathrm{A^*\text{-}A}} / \Delta\sigma_{\mathrm{P\text{-}A}}. \ \ \Delta\sigma_{\mathrm{P\text{-}A}} = \Delta\tau_{\mathrm{A^*\text{-}A}} / \tan(30°) = 68 / \tan(30°) = 118 \text{ MPa}.$$

Ovo znači da je mjerilo 1 MPa = 1 mm kao „okrugli” broj primjeren. Na slici 1.8. prikazani su koraci konstrukcije parametara kružnice prije ucrtavanja kružnice.



Slika 1.8. Ucrtavanje točaka i traženje središta kružnice

Nakon određivanja mjerila i crtanja osi, označeno točkom 0, ucrtamo točke koje predstavljaju presjeke, A i A*, označeno točkama 1 i 2. Zatim povučemo normale kroz točke A i A*, do njihovog presjecišta, koje predstavlja pol P. Kada imamo pol P možemo pronaći središte kružnice, tako što ćemo naći sjecište polovišta dužine AP i osi σ. Sada možemo nacrtati kružnicu iz središta do točaka A, P ili A*. Nakon crtanja kružnice 4 (slika 1.9.), možemo povući dužinu iz pola paralelnu s normalom na presjek B jer ta dužina prolazi kroz pol i točku B. Nakon toga možemo očitati kolika je komponenta σ_y. Očitano je $\sigma_y = -20$ MPa. Nadalje ćemo provjeriti izračun analitičkim rješenjem. Koristeći (13) jednadžbe uvrštavamo vrijednosti komponenata naprezanja i dobivamo:

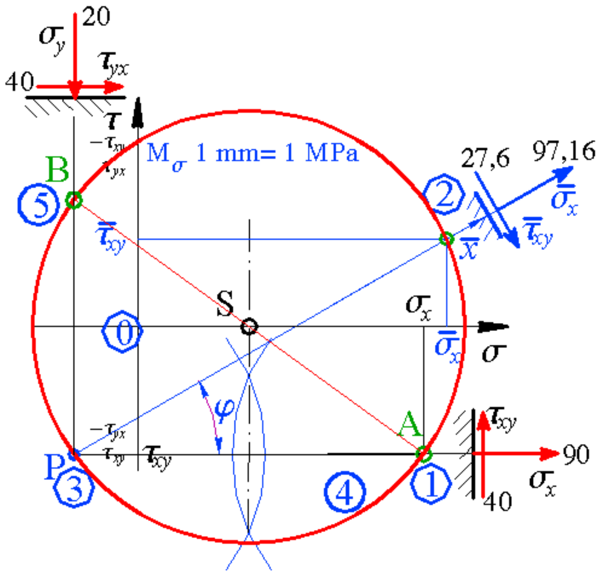
$$\sigma_{1,2} = \frac{90-20}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{90-(-20)}{2}\right)^2 + 40^2} = 35 \pm 68{,}01 \Rightarrow \sigma_1 = 103{,}01 \text{ MPa}, \ \sigma_2 = -33{,}01 \text{ MPa}. \quad (11)$$

Analitički ćemo naprezanje u presjeku B izračunati pomoću jednadžbi (6) odabirom jedne od jednadžbi u kojoj je σ_y jedina nepoznanica prema:

$$\bar{\sigma}_x(\varphi) = \sigma_x \cos^2(\varphi) + \sigma_y \sin^2(\varphi) + 2\tau_{xy} \sin(\varphi)\cos(\varphi).$$

$$\sigma_y = \frac{\bar{\sigma}_x(\varphi) - \sigma_x \cos^2(\varphi) - 2\tau_{xy}\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{\sin^2(\varphi)} = \frac{97{,}16 - 90 \cdot 0{,}75 - 2 \cdot 40\sqrt{3}/4}{0{,}25} = \quad (12)$$

$$-19{,}925 \text{ MPa}.$$



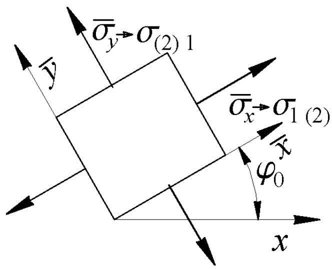
Slika 1.9. Određivanje komponenata naprezanja u presjeku B

1.3. Glavna naprezanja

Često u kompliciranim stanjima naprezanja radi proračuna uvjeta čvrstoće bitnije je izračunati kut za koji je posmično naprezanje na zarotiranom presjeku jednako nuli jer tada dobivamo ekstremne vrijednosti za normalne komponente naprezanja. Taj kut označavamo φ_0, a ekstremne vrijednosti normalnih naprezanja (normalne komponente naprezanja u zarotiranom koordinatnom sustavu za φ_0) nazivamo glavna naprezanja. Simbolično je to prikazano na slici 1.10. Postupak određivanja jednadžbe kojom računamo glavna naprezanja u ravnini ovdje neće biti prikazan, već će biti prikazane samo jednadžbe za glavna naprezanja i glavne osi, a to su:

$$\sigma'_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \left(\tau_{xy}\right)^2}, \quad \left|\sigma_1 \geq \sigma_2\right|; \tan\left(2\varphi_0\right) = 2\tau_{xy} / \left(\sigma_x - \sigma_y\right). \qquad (13)$$

Oznaka $\sigma'_{1,2}$ se ovdje pojavljuje zbog pravila o označavanju glavnih naprezanja: σ_1 je algebarski najveće naprezanje, σ_2 je iduće (srednje) i σ_3 je najmanje naprezanje. Kada izračunavamo glavna naprezanja u jednoj ravnini, ne znamo unaprijed kakva će ona biti u odnosu na pravilo o označavanju pa dodajemo oznaku apostrofa. Ovaj će detalj biti istaknut u primjeru.



Slika 1.10. Glavna naprezanja u ravnini Oxy

Na slici 1.10. glavna su naprezanja označena brojevima 1 i 2, s time da je jedan od brojeva u zagradi. Ovisno je li σ_x veće od σ_y, kada ćemo označiti $\bar{\sigma}_x \rightarrow \sigma_1, \bar{\sigma}_y \rightarrow \sigma_2$, ili obrnuto, dogovor je u svijetu da kada računamo ukupno tri glavna naprezanja, indeks „1" dodajemo algebarski najvećem glavnom naprezanju, „2" manjem od njega, a „3" najmanjem. Ovdje je prikazana transformacija naprezanja u ravnini, a to znači da na trećem presjeku, koji ima normalu iz ravnine crtanja (papira), naprezanje je nula ili je često samo normalna komponenta, pa je ona sama po sebi jedno od glavnih naprezanja.

Primjer 1.3. Glavna naprezanja za ravninsko stanje naprezanja. Analitičko i grafičko rješenje

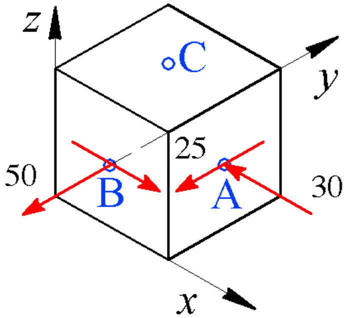
Treba odrediti glavna naprezanja za stanje naprezanja prikazano slikom 1.11. Komponente su u MPa.

Zadane ili ucrtane komponente naprezanja na plohama su:

$\sigma_x = -30$ MPa, $\tau_{xy} = -25$ MPa, $\sigma_y = 50$ MPa.

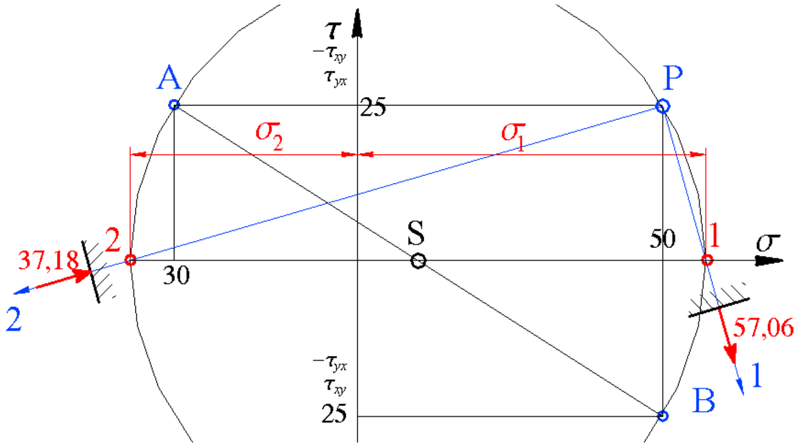
Koristeći jednadžbu (13) uvrštavamo vrijednosti komponenata naprezanja pa dobivamo:

$$\sigma_{1,2} = \frac{-30+50}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-30-50}{2}\right)^2 + 25^2} = 10 \pm 47{,}17 \Rightarrow \sigma_1 = 57{,}17 \text{ MPa}, \ \sigma_2 = -37{,}17 \text{ MPa}. \quad (14)$$



Slika 1.11. Stanje naprezanja u točki materijala

Za grafičko rješenje Mohrovom kružnicom naprezanja prvo odaberemo mjerilo. Dobru procjenu o promjeru kružnice daje nam raspon normalnih komponenata naprezanja jer je posmična komponenta relativno mala. Raspon 50 – (-30) daje nam 80 MPa, iz čega bismo mogli zaključiti da je mjerilo 1 mm ≅ 0,5 MPa. Time dobivamo pregledniju sliku, što doprinosi točnosti. Konstrukcija Mohrove kružnice naprezanja za primjer 1.3. prikazana je na slici 1.12.



Slika 1.12. Konstrukcija Mohrove kružnice naprezanja

Primjer 1.4. Glavna naprezanja za prostorno stanje naprezanja

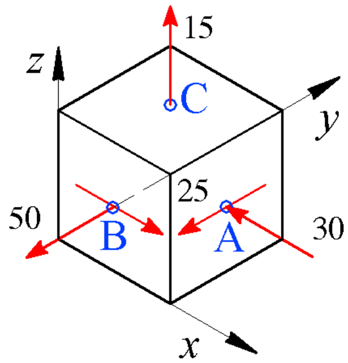
Treba odrediti glavna naprezanja za stanje naprezanja prikazano slikom 1.13. Komponente su u MPa.

Zadane komponente naprezanja su:

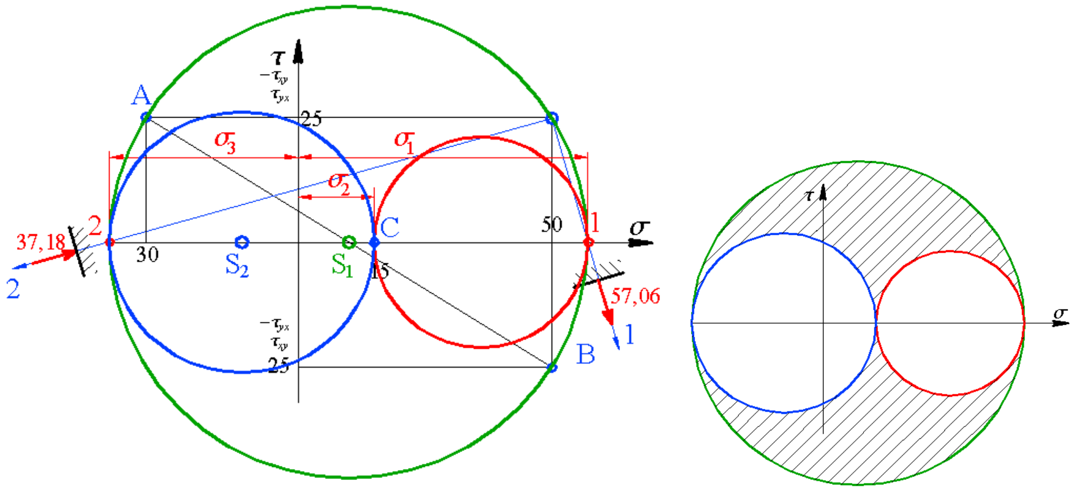
$$\sigma_x = -30 \text{ MPa},\ \tau_{xy} = -25 \text{ MPa}, \sigma_y = 50 \text{ MPa},\ \sigma_z = 15 \text{ MPa}.$$

Pri grafičkom načinu traženja glavnih naprezanja prvo transformiramo komponente u ravnini u kojoj postoje posmične komponente, a zatim „dodamo" komponentu na trećoj plohi. Često su na jednoj plohi samo normalne komponente naprezanja, u složenim slučajevima opterećenja, što olakšava traženje glavnih naprezanja. Nakon postupka identičnog onom u prethodnom primjeru, dodajemo komponentu na presjeku *z*. Ta je komponenta sama po sebi glavno naprezanje jer nema posmičnih komponenata na toj plohi. Koje je od ukupnih glavnih naprezanja σ_z ovisi o iznosu te komponente u odnosu na izračunata glavna naprezanja. Prema Mohrovoj kružnici na slici 1.14.a) 15 MPa je između 57,06 i -37,18. Iz tog razloga pišemo rezultat u obliku:

$$\sigma_1 = 57{,}06 \text{ MPa},\ \sigma_2 = 15 \text{ MPa},\ \sigma_3 = -37{,}18 \text{ MPa}.$$



Slika 1.13. Komponente naprezanja na elementarnoj prizmi



Slika 1.14. Glavna naprezanja u Mohrovoj kružnici za troosno stanje naprezanja: a) konstrukcija i b) područje transformiranih komponenata

Ucrtat ćemo još dvije Mohrove kružnice naprezanja unutar „glavne", kako je prikazano na slici 1.14.a). Te dvije kružnice predstavljaju transformirane komponente naprezanja za ravnine *Oxz* i *Oyz* i određene su glavnim naprezanjima. Još jedna karakteristika transformacije troosnog stanja naprezanja je da su sve transformirane komponente u šrafiranom području između tri kružnice, kako je prikazano na slici 1.14.b).

2. HOOKEOV ZAKON ZA HOMOGENE I IZOTROPNE MATERIJALE

Za izotropne homogene materijale Robert Hooke je prvi postavio poveznicu između komponenata naprezanja i komponenata deformacije. Svaka normalna komponenta naprezanja povezana je (jednoznačno) sa svakom duljinskom komponentom deformacije, a svaka posmična komponenta naprezanja povezana je jednoznačno samo s istoimenom kutnom komponentom deformacije, kako je prikazano u idućoj jednadžbi:

$$
\begin{gathered}
\sigma_x = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right), \sigma_y = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right), \sigma_z = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right),\\
\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z,\\
\tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \tau_{zx} = G\gamma_{zx},\\
G = \frac{E}{2(1+\nu)}.
\end{gathered} \tag{15}
$$

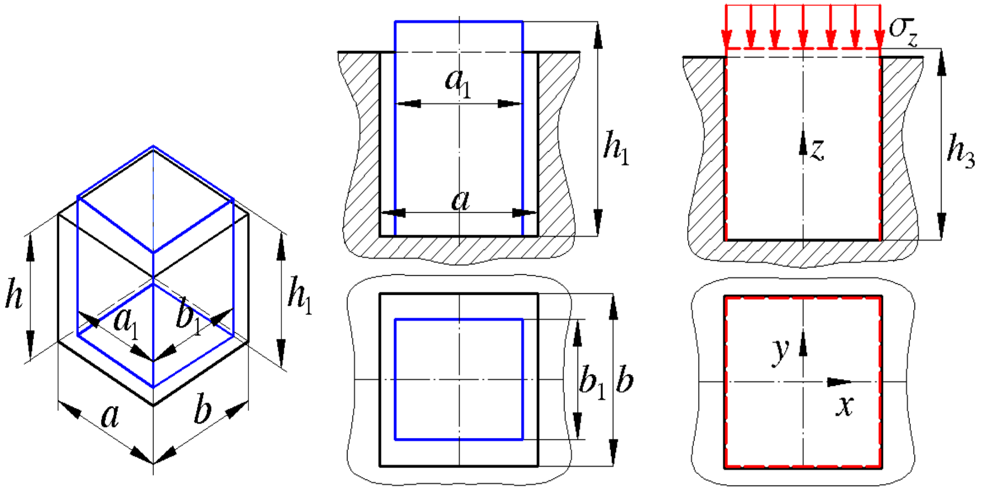
Obrnuto, veze komponenata deformacije s komponentama naprezanja su:

$$
\begin{gathered}
\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right], \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right], \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right],\\
\gamma_{xy} = \tau_{xy} / G, \gamma_{yz} = \tau_{yz} / G, \gamma_{zx} = \tau_{zx} / G.
\end{gathered} \tag{16}
$$

2.1. Gnječenje prizmatičnog bloka

Za blok prikazan na slici 2.1.a) koji je pritisnut na gornjoj plohi jednoliko i bez pojave trenja (dobro podmazivanje) unutar krute okoline (kalup) treba izračunati vrijednost sile koja djeluje na gornjoj plohi za stanje deformiranosti pri kojem je kalup popunjen. Kalup je dovoljno niži po mjeri *h* pa ne dolazi do pritiskanja gornje plohe kalupa pri najvećoj sili.
Zadano je:

$$a = 50 \text{ mm}, a_1 = 49{,}992 \text{ mm}, b = 50 \text{ mm}, b_1 = 49{,}982 \text{ mm}, h = 100 \text{ mm}, E = 70\ 000 \text{ MPa}, \nu = 0{,}3.$$



Slika 2.1. Gnječenje bloka u krutom kalupu:
a) izometrijski prikaz, b) nacrt i tlocrt i c) deformirano stanje

Prema slici 2.1.b) vidimo da će uz kvadratni presjek kalupa prvo dotaknuti stijenke kalupa stranice bloka koje putuju uzduž kote „a". Vrijednost sile pri kojoj će se dogoditi doticanje stijenke kalupa po mjeri „a" je F_1. Manja je zračnost između tih stijenki bloka koji se deformira i stijenki kalupa. Stoga ćemo prvo izračunati duljinske deformacije na pravcima duž kote „a" i „b". Možemo koristiti koordinatni sustav prema slici 2.1.c). Iz zadanih mjera bloka i kalupa znamo da će prvo mjera 49,992 promijeniti duljinu (mjeru) na 50,000, te je stoga promjena duljine jednaka 0,008 mm. Duljinsku deformaciju po osi x računamo kao omjer promjene duljine u odnosu na početnu duljinu te mjere:

$$\varepsilon_x(F_1) = \Delta(l_x)/l_x^0, \varepsilon_x(F_1) = 0{,}008/49{,}992 = 1{,}6 \cdot 10^{-4}. \qquad (17)$$

Sada još nema naprezanja σ_x jer su stijenke bloka upravo dodirnule stijenke kalupa. Sila na gornjoj plohi uzrokuje naprezanje po cijelom bloku jednoliko raspodijeljeno, prema (16) iznosa:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right], \left|\sigma_x = 0, \sigma_y = 0\right| \Rightarrow \\ &\sigma_z = -\frac{\varepsilon_x E}{\nu} = -\frac{1{,}6 \cdot 10^{-4} \cdot 70\,000}{0{,}3} = -37{,}\dot{3}\ \text{MPa}. \end{aligned} \qquad (18)$$

Zbog zanemarivanja trenja ne izračunavamo kutne deformacije što znači da će postojati samo promjena mjere, ne i oblika, tj. blok (kvadar) će ostati kvadar samo drugih mjera. Kako povećavamo silu blok pritišće stijenke po mjeri „a" i približava se stijenkama po mjeri „b" dok se ne poništi zračnost što daje:

$$\varepsilon_x = 1,6 \cdot 10^{-4},\ \varepsilon_y = 0,018/49,982 = 3,6 \cdot 10^{-4} \Rightarrow$$
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right],\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right],\ \left|\sigma_y = 0\right| \Rightarrow$$
$$1,6 \cdot 10^{-4} = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\sigma_z\right],\ 3,6 \cdot 10^{-4} = \frac{1}{E}\left[-\nu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right] \Rightarrow \tag{19}$$
$$\sigma_x - \nu\sigma_z = 1,6 \cdot 10^{-4} E,\ -\nu\left(\sigma_z + \sigma_x\right) = 3,6 \cdot 10^{-4} E \Rightarrow$$
$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu}\left[-1,6 \cdot 10^{-4} - \frac{3,6 \cdot 10^{-4}}{\nu}\right] = -73,23 \text{ MPa.}$$

Pri ovom naprezanju na gornjoj plohi (i cijelom bloku) izračunavamo silu koja uzrokuje to naprezanje:

$$F_1 = A\sigma_z = 50 \cdot 50 \cdot 73,23 = 183\,075 \text{ N.} \tag{20}$$

Predznak naprezanja određuje da sila pritišće blok pa to treba uzeti u obzir u kontekstu predznaka.

2.2. Gnječenje cilindričnog bloka

Za blok prikazan na slici 2.2.a) koji je pritisnut na gornjoj plohi jednoliko i bez pojave trenja (dobro podmazivanje) unutar krute okoline (kalup), treba izračunati vrijednost sile koja djeluje na gornjoj plohi za stanje deformiranosti pri kojem je kalup popunjen. Kalup je dovoljno nizak po mjeri *h* pa ne dolazi do pritiskanja gornje plohe kalupa pri najvećoj sili.

Zadano je: $d =$ 50 mm, $d_1 =$ 49,980 mm, $h =$ 100 mm, $E =$ 70 000 MPa, $\nu =$ 0,3.

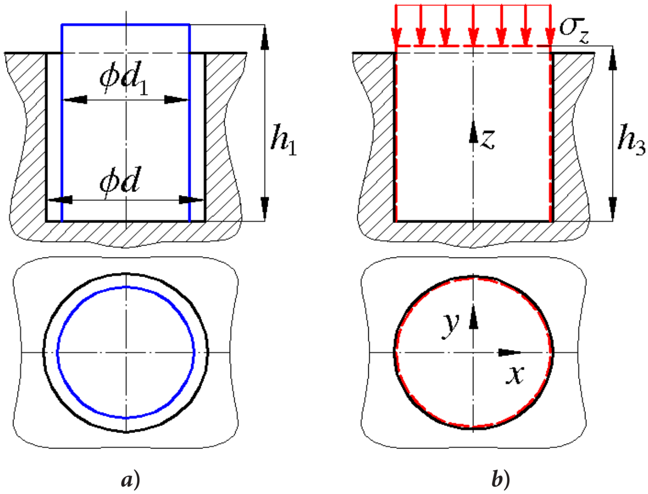
Prema slici 2.2.a) vidimo da će uz okrugli presjek kalupa i bloka svugdje biti isti uvjeti, a plašt cilindra dotaknut će stijenke kalupa u istom trenutku, što zovemo osno simetrični problem. Možemo koristiti koordinatni sustav prema slici 2.2.b). Iz oblika bloka i kalupa (osnosimetrično) znamo da će u svakom pravcu koji prolazi kroz središte bloka deformacija biti ista. Duljinsku deformaciju po osi *x* računamo kao omjer promjene promjera u odnosu na početnu duljinu te mjere:

$$\varepsilon_x\left(F_1\right) = \Delta\left(d\right)/d_0,\ \varepsilon_x = 0,02/49,980 = 4 \cdot 10^{-4}. \tag{21}$$

Sada još nema naprezanja σ_x i σ_y jer su stijenke bloka upravo dodirnule stijenke kalupa. Sila na gornjoj plohi uzrokuje naprezanje jednoliko raspodijeljeno po cijelom bloku, prema (16) iznosa:

$$4\cdot 10^{-4}=\frac{1}{E}\left[\sigma_x-\nu\left(\sigma_y+\sigma_z\right)\right],\, 4\cdot 10^{-4}=\frac{1}{E}\left[\sigma_y-\nu\left(\sigma_z+\sigma_x\right)\right]\Big|\sigma_x=0,\,\sigma_y=0\Big|\Rightarrow \tag{22}$$

$$\sigma_z=-\frac{\varepsilon_x E}{\nu}=-\frac{4\cdot 10^{-4}\cdot 70\,000}{0,3}=-93,\dot{3}\text{ MPa.}$$



Slika 2.2. Gnječenje bloka u krutoj okolini - kalupu: a) nacrt i tlocrt i b) deformirano stanje

Zbog zanemarivanja trenja ne izračunavamo kutne deformacije. Postojat će samo promjena mjere, ne i oblika, tj. blok (cilindar) će ostati cilindar samo drugih mjera. Pri ovom naprezanju na gornjoj plohi (i cijelom bloku) izračunavamo silu koja uzrokuje to naprezanje:

$$F_1=A\sigma_z=50^2\cdot\pi\cdot 93,\dot{3}/4=183\,260\text{ N.} \tag{23}$$

2.3. Temperaturne deformacije. Blok unutar krutih stijenki

Svaki materijal mijenja volumen, tj. širi se prilikom zagrijavanja ili povišenja temperature i smanjuje volumen ili se skuplja prilikom hlađenja ili sniženja temperature. Uslijed promjene temperature javljaju se samo duljinske deformacije, jednako u svim smjerovima. Komponente temperaturne deformacije računamo:

$$\varepsilon_x^{\mathrm{T}}=\alpha\Delta T,\,\varepsilon_y^{\mathrm{T}}=\alpha\Delta T,\,\varepsilon_z^{\mathrm{T}}=\alpha\Delta T. \tag{24}$$

Svaka komponenta temperaturne deformacije proporcionalna je promjeni temperature i koeficijentu temperaturnog širenja, α, koji ima mjernu jedinicu u SI sustavu m/mK. Primjer izračuna naprezanja uslijed temperaturnih deformacija bit će prikazan u nastavku.

Treba odrediti naprezanje u bloku prema slici 2.3.a) ako je povišenje temperature $\Delta T = 60$ K. Materijal je aluminij, s koeficijentom temperaturnog širenja $\alpha = 22 \cdot 10^{-6}$ K^{-1}. Treba zanemariti trenje na svim dodirnim površinama. Pretpostavka je da je toplinski tok *Φ* raspodijeljen tako da je u cijelom bloku promjena temperature jednaka. Zadano je:

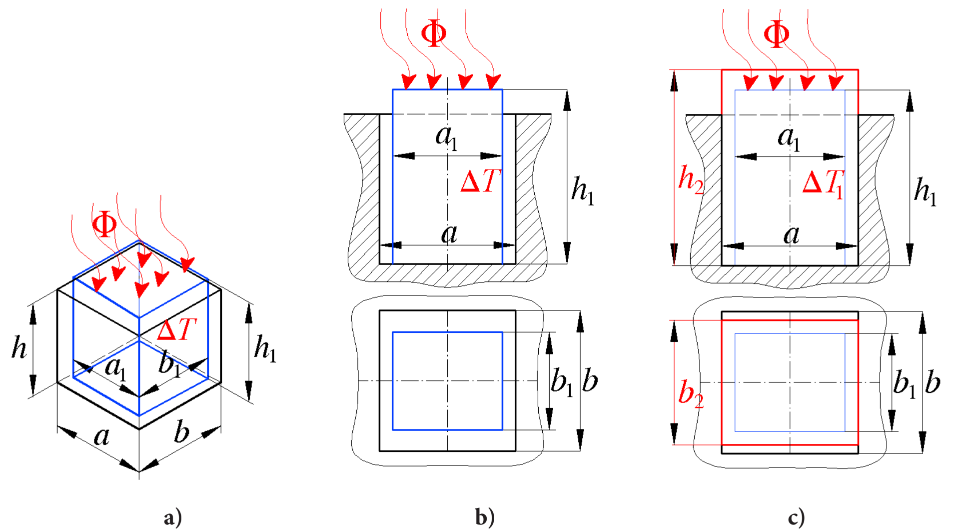
$a = 50$ mm, $a_1 = 49{,}95$ mm, $b = 50$ mm, $b_1 = 49{,}90$ mm, $h = 100$ mm, $E = 70\ 000$ MPa, $\nu = 0{,}3$.

Blok je pri početnoj temperaturi umetnut u kruti kalup (okolinu) nacrtan crnom bojom, te ima zračnosti prema susjednim vertikalnim plohama, različito uzduž mjere *a* i mjere *b*. Materijal se duljinski širi u svim smjerovima jednako, tj. prizmatični blok mijenja duljine stranica na jednak način, jednakom duljinskom deformacijom. Promjena duljine stranice proporcionalna je duljini stranice. Budući da je zračnost uzduž mjere *a* manja, iznosa 50 – 49,95 = 0,05 mm, prema zračnosti uzduž mjere *b*, iznosa 50 – 49,90 = 0,1 mm, a stranice *a* i *b* su praktično jednake veličine, prvo će se ugrijavanjem „zatvoriti" zračnost uzduž mjere *a* jer je manja. Promjena temperature pri kojoj će se poništiti zračnost od 0,05 mm iznosi:

$$\Delta a_1 = a_1 \Delta T_1 \alpha = 0{,}05 \text{ mm.}$$
$$\Delta T_1 = 0{,}05 / (\alpha a_1) = 0{,}05 / \left(22 \cdot 10^{-6} 49{,}95\right) = 45{,}5 \text{ K.} \qquad (25)$$

To je stanje prikazano na slici 2.3.c). Pri toj promjeni temperature stranica b_1 promijenila je svoju mjeru i smanjila zračnost prema stijenkama kalupa za iznos:

$$\Delta b_1 = b_1 \Delta T_1 \alpha = 49{,}9 \cdot 45{,}5 \cdot 22 \cdot 10^{-6} = 0{,}049\ 95 \text{ mm.} \qquad (26)$$



Slika 2.3. Temperaturno deformiranje bloka: a) prostorni prikaz, b) nacrt i tlocrt prije deformiranja i c) deformirano stanje

U ovom stanju još nema naprezanja u bloku osim onoga na vertikalnom pravcu uslijed težine bloka koje ćemo zanemariti. Ugrijavanjem se blok dalje širi (ili pokušava) po svim stranicama, pa će stranica *a* ostati iste duljine jer se dotaknula krutog kalupa, stranica *b* će dostići mjeru od 50 mm, a visina, odnosno mjera *c*, će se slobodno širiti. Postavit ćemo os *x* po mjeri *a*, os *y* po mjeri *b*. Tijekom daljnjeg ugrijavanja prvo ćemo provjeriti kako se mijenja mjera *b* s obzirom na to da su se uvjeti uzduž mjere *a* promijenili. Pojavit će se naprezanje σ_x jer sada kalup pritišće blok po tim plohama. Kruti kalup neće dopustiti daljnje širenje mjere *a* stijenke, stoga ćemo provjeriti ovisi li naprezanje σ_x o povišenju temperature iznad ΔT_1 i hoće li do ukupne promjene temperature 60 K stijenke po mjeri *b* dotaknuti kalup tako što ćemo koristiti jednadžbe (16):

$$\sigma_x \neq 0, \sigma_y = 0, \sigma_z = 0.$$

$$\varepsilon_x^\sigma = -\varepsilon_x^{T(2-1)} = -\alpha\left(\Delta T_2 - \Delta T_1\right) = -22\cdot 10^{-6}\left(\Delta T_2 - 45{,}5\right).$$

$$\varepsilon_x^\sigma = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] = \frac{\sigma_x}{E}, \varepsilon_y^\sigma = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right] = -\frac{\nu\sigma_x}{E}.$$

do 60 K:

$$\Delta b_1^T = b_1 \Delta T_2 \alpha = 49{,}9 \cdot 60 \cdot 22 \cdot 10^{-6} = 0{,}065\,87 \text{ mm}. \qquad (27)$$

$$\varepsilon_x^\sigma = -22\cdot 10^{-6}\left(60 - 45{,}5\right) = -3{,}19\cdot 10^{-4} \rightarrow$$

$$\sigma_x = -70\,000 \cdot 3{,}19 \cdot 10^{-4} = -22{,}33 \text{ MPa}.$$

$$\varepsilon_y^\sigma = -\frac{\nu\sigma_x}{E} = 9{,}57\cdot 10^{-5} \rightarrow \Delta b_1^\sigma = 49{,}9 \cdot 9{,}57 \cdot 10^{-5} = 0{,}004\,775 \text{ mm}.$$

$$\Delta b_1\left(60 \text{ K}\right) = \Delta b_1^T + \Delta b_1^\sigma = 0{,}065\,87 + 0{,}004\,775 = 0{,}070\,645 \text{ mm}.$$

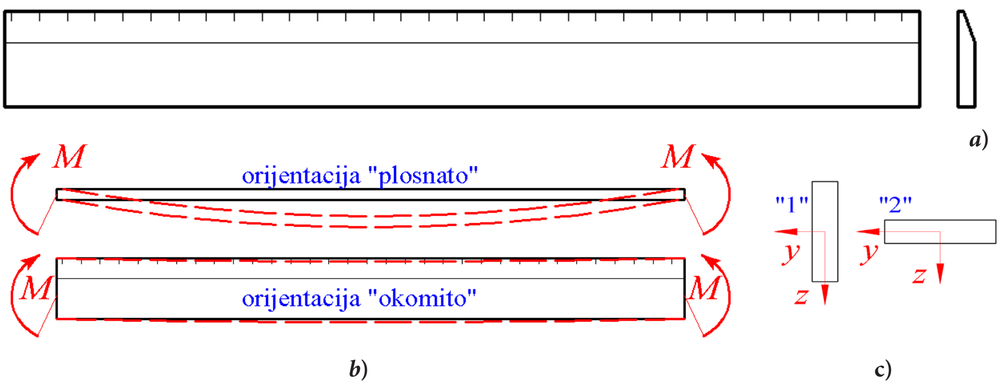
Prema izračunu deformiranja bloka možemo iz (27) vidjeti da će se blok deformirati tako da stranice po mjeri *b* neće dotaknuti kalup. Stanje naprezanja pri ugrijavanju za 60 K bit će:

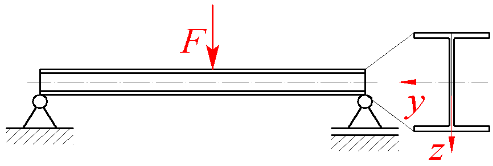
$$\sigma_x = -22{,}33 \text{ MPa}, \ \sigma_y = 0, \ \sigma_z = 0.$$

Posmične komponente unaprijed zanemarujemo iako u stvarnosti postoje.

3. MOMENTI TROMOSTI (INERCIJE) POVRŠINE – GEOMETRIJSKE KARAKTERISTIKE PRESJEKA

Analizom savijanja tankih nosača, o čemu će biti riječi u jednom od idućih poglavlja, u jednadžbama koje povezuju opterećenje, geometriju presjeka i naprezanja, pojavljuju se integrali koje nazivamo momenti tromosti (inercije) presjeka. To su integrali po površini poprečnog presjeka nosača koji ukazuju na „otpornost" presjeka na opterećenje savijanjem, a označavamo ih velikim slovom I. Što je veći moment tromosti, to je nosač otporniji na savijanje, tj. naprezanje je manje. Naravno, naprezanje ovisi o obliku presjeka pa povećanje momenta tromosti površine nije jedina veličina (parametar) koji određuju naprezanje. Najjednostavnija predodžba značaja ili utjecaja momenta tromosti površine presjeka nosača je deformiranje jednostavnog nosača, odnosno ravnala, prikazanog na slici 3.1.a). Rukama možemo savijati ravnalo djelujući spregom u svakoj ruci, kako je prikazano na slici 3.1.b). Kada djelujemo istom spregom u obje ruke, u oba je slučaja zamjetna velika razlika u deformiranom obliku, i to ako ravnalo savijamo u orijentaciji „plosnato", kao na slici 3.1.b), ili presjek zakrenemo za 90° „okomito". Velika je razlika u zakrivljenosti ravnala, ili drugim riječima, velika je razlika u pomaku sredine ravnala prema krajevima. Razlika u orijentaciji presjeka prema djelujućem spregu prikazana je na slici 3.1.c). Ako os *y* postavimo uvijek okomito na ravninu crtanja, tada ćemo u dvije različite orijentacije presjeka imati veliku razliku u „visini" presjeka u ravnini u kojoj se deformira, koja je u svim prikazanim primjerima ravnina crtanja. Isti presjek, iste ploštine i oblika, pravokutnik mjera *b* x *h* ima očito različitu otpornost na deformiranje što ovisi o orijentaciji prema djelujućem spregu, kako je prikazano na slici 3.1.c), pa se zato koristi tzv. I profil kao nosač kako je i prikazano na slici 3.1.d).

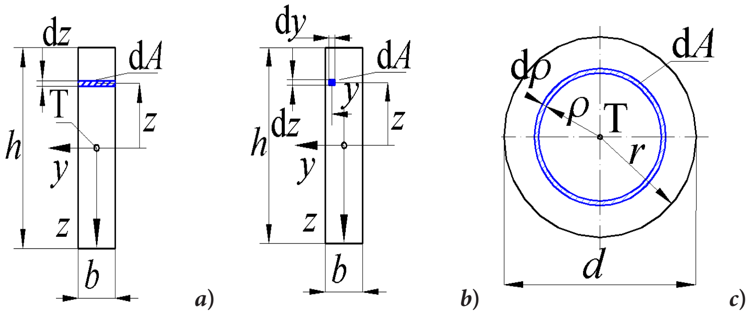




d)

Slika 3.1. Savijanje ravnala: a) uobičajeno ravnalo,
b) razlika deformiranja različito orijentiranog ravnala,
c) različite orijentacije presjeka prema djelujućem momentu (spregu) i
d) orijentacija I profila u nosaču

Računanje momenata tromosti površine presjeka ovdje ćemo provoditi na temelju „gotovih" jednadžbi koje proizlaze iz analize naprezanja i ravnoteže presjeka nosača pri savijanju prema [1]. Uz pojam momenta tromosti površine postoje i potpojmovi: aksijalni, devijacijski (centrifugalni) i polarni momenti tromosti površine presjeka. Karakteristika momenata tromosti površine je da su najmanji za određeni presjek prema težišnim osima, tj. aksijalni moment tromosti presjeka, koji je najbitniji za računanje naprezanja pri savijanju, računamo uvijek prema težišnoj osi oko koje djeluje moment savijanja. Ako je nosač kruto spojen s nekim drugim dijelom, npr. pločom, tada ćemo izračunati utjecaj tog nosača na ukupno ponašanje sklopa prema osi izvan težišta presjeka nosača.



Slika 3.2. Definicija momenta tromosti površine:
a) aksijalni, b) devijacijski i c) polarni

Aksijalni moment tromosti presjeka određen je prema jednoj osi, prema kojoj i dobiva indeks. Za izvod jednadžbi uzet ćemo da je os x uzduž nosača, a ostale dvije osi prema slici 3.2.a), pa će za os y aksijalni moment tromosti površine presjeka biti:

$$I_y = \int_A z^2 \mathrm{d}A = \int_{-h/2}^{h/2} bz^2 \mathrm{d}z = b\,z^3/3\Big|_{-h/2}^{h/2} = bh^3/12. \tag{28}$$

Analogno tome, za os z aksijalni moment tromosti površine presjeka je:

$$I_z = \int_A y^2 \mathrm{d}A = \int_{-b/2}^{b/2} hz^2 \mathrm{d}z = h\,z^3/3\Big|_{-b/2}^{b/2} = b^3h/12. \tag{29}$$

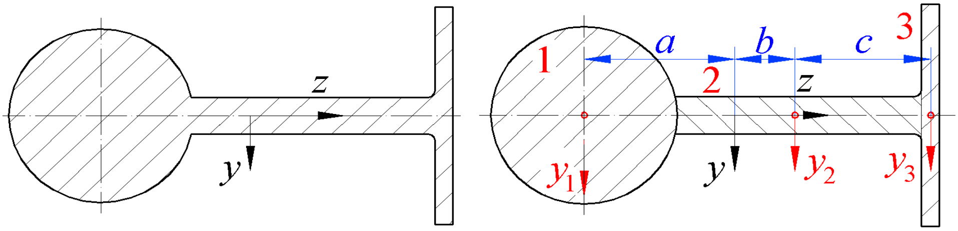
Prema slici 3.2.b) devijacijski ili centrifugalni moment tromosti površine presjeka određen je prema:

$$I_{yz} = \int_A yz\mathrm{d}A = \int_{-h/2}^{h/2} z\left(\int_{-b/2}^{b/2} y\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z = 0. \tag{30}$$

Unutrašnji integral u jednadžbi (30) daje nulu, što znači da je cijeli integral jednak nuli. Na temelju toga zaključujemo da je za simetrične presjeke prema težišnim osima devijacijski moment tromosti površine presjeka jednak nuli. Polarni momenti tromosti površine presjeka računamo u skladu sa slikom 3.2.c) prema:

$$I_\mathrm{p} = \int_A \rho^2 \mathrm{d}A = \int_0^r \rho^2 2\rho\pi \mathrm{d}\rho = 2\pi\rho^4/4\Big|_0^r = r^4\pi/2 = d^4\pi/32. \tag{31}$$

Zaključno treba naglasiti da za izračunavanje aksijalnog momenta tromosti presjeka kompliciranog presjeka koristimo linearnost operacije integriranja pa moment tromosti presjeka izračunavamo zbrajanjem momenata tromosti prema težišnoj osi cijeloga presjeka izračunavanjem momenata tromosti presjeka pojedinih jednostavnih dijelova presjeka, kako je prikazano na slici 3.3.



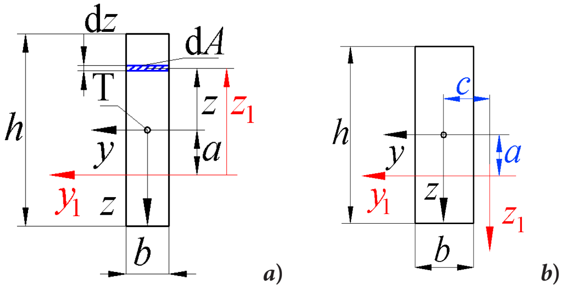
a) *b)*

Slika 3.3. Složeni presjek: a) geometrija i b) razdijeljeni presjek na osnovne likove

Izračunavanje pojedinih „sastavnica", tj. pribrojnika za moment tromosti cijelog presjeka mora biti drugačije od izračuna prikazanog u jednadžbama od (28) do (30) jer su oni izračunati prema vlastitim težišnim osima, dok se ovdje računa moment tromosti presjeka prema osima u težištu presjeka. To znači da nam trebaju jednadžbe za izračun momenta tromosti presjeka prema osi koja je izmaknuta iz težišta, što će biti prikazano u nastavku teksta.

3.1. Momenti tromosti površine presjeka prema osima izvan težišnih osi

Za izračunavanje aksijalnog momenta tromosti složenog presjeka treba izračunati momente tromosti presjeka prema osima izvan težišta, u skladu sa sljedećom slikom.



Slika 3.4. Moment tromosti presjeka prema izmaknutoj osi iz težišta: a) Steinerov dodatak za aksijalni moment tromosti i b) mjere odmaka osi

Aksijalni moment tromosti presjeka prema osi y_1 izračunat ćemo u skladu sa slikom 3.4.a) prema:

$$
\begin{gathered}
I_{y_1} = \int_A z_1^2 \mathrm{d}A = \int_{-h/2-a}^{h/2-a} b z_1^2 \mathrm{d}z_1 = b\, z_1^3/3 \Big|_{-h/2-a}^{h/2-a} = \\
b\left[(h/2-a)^3 - (-h/2-a)^3 \right]/3 = b\left[2h^3/8 + 6a^2 h/2 \right]/3 = \\
b\left[h^3/4 + 3a^2 h \right]/3 = bh^3/12 + a^2 bh = \\
I_y + a^2 A.
\end{gathered} \tag{32}
$$

Iz jednadžbe (32) možemo zaključiti (što je u literaturi dokazano za opći slučaj, ne samo za pravokutni presjek) da za izmaknute osi aksijalne (i devijacijski) momente tromosti računamo dodajući odgovarajućem težišnom momentu tromosti presjeka tzv. Steinerov dodatak, umnožak ploštine presjeka i kvadrata udaljenosti težišne osi tog lika i osi prema kojoj računamo moment tromosti cijelog presjeka. Bez prikazivanja detalja, jednadžbe za izračunavanje preostalih momenta tromosti presjeka, u skladu sa slikom 3.4.b), su:

$$
\begin{gathered}
I_{z_1} = b^3 h/12 + c^2 bh = I_z + c^2 A. \\
I_{y_1 z_1} = acbh = I_{yz} + acA.
\end{gathered} \tag{33}
$$

Pri računanju devijacijskog momenta tromosti presjeka za lik odmaknut od težišnih osi cijelog presjeka treba uzeti u obzir predznak veličina a i c tako što ćemo ih promatrati u težišnom koordinatnom sustavu cijelog presjeka. Za izračun momenta tromosti presjeka složenih presjeka, uz Steinerovo pravilo, koristit ćemo i tablične podatke (jednadžbe) za težišne momente tromosti presjeka i preračunavati na osi cijelog presjeka.

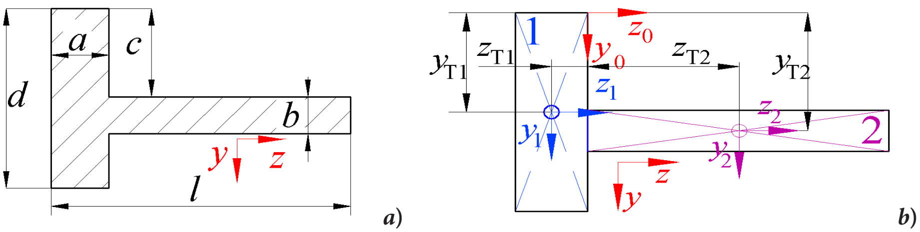
3.2. Glavni težišni momenti tromosti površine presjeka

Slično kao i kod naprezanja, i momente tromosti presjeka možemo transformirati zakretanjem koordinatnog sustava oko težišta presjeka računajući pritom promijenjene vrijednosti aksijalnih momenata tromosti i devijacijskog momenta tromosti ovisno o kutu rotacije. Za neki kut devijacijski moment tromosti postat će nula, slično kao i posmično naprezanje pri transformaciji naprezanja, a te ćemo pripadajuće aksijalne momente nazvati – glavni težišni momenti tromosti presjeka. U analizi savijanja, zbog koje računamo momente tromosti presjeka, bitno je doznati koje su osi glavne težišne osi tromosti presjeka jer one određuju deformiranje i raspodjelu naprezanja pri savijanju. Bez prikazivanja detalja, koji su prikazani u literaturi [1], prikazana je jednadžba za izračun glavnih težišnih momenata tromosti i osi presjeka koja izgleda ovako:

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}, \quad \tan\left(2\varphi_0\right) = \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}. \qquad (34)$$

Primjer 3.1. Glavni težišni momenti tromosti presjeka za nesimetrični T profil

Treba odrediti glavne težišne momente i osi tromosti presjeka za presjek prikazan na slici 3.5.a). Zadano je: l = 100 mm, a = 10 mm, b = 5 mm, c = 50 mm, d = 80 mm.

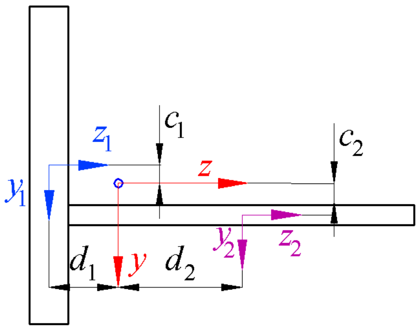


Slika 3.5. Nesimetrični T presjek: a) geometrija i b) rastavljanje na pravokutnike

Na slici 3.5.b) prikazani su lokalni koordinatni sustavi za svaki lik (pravokutnik) koji sačinjava zadani T presjek i pomoćni koordinatni sustav, označen Oy_0z_0, pomoću kojega izračunavamo položaj težišta presjeka, i postavljamo koordinatni sustav u težište. Koordinate težišta pojedinih pravokutnika su: $y_{T1} = 40$ mm, $z_{T1} = -5$ mm, $y_{T2} = 52{,}5$ mm, $z_{T2} = 45$ mm. Težište presjeka u pomoćnom koordinatnom sustavu je:

$$y_T = \frac{A_1 y_{T1} + A_2 y_{T2}}{A_1 + A_2} = \frac{80\cdot 10\cdot 40 + 90\cdot 5\cdot 52{,}5}{80\cdot 10 + 90\cdot 5} = 44{,}5 \text{ mm},$$

$$z_T = \frac{A_1 z_{T1} + A_2 z_{T2}}{A_1 + A_2} = \frac{80\cdot 10\cdot(-5) + 90\cdot 5\cdot 45}{80\cdot 10 + 90\cdot 5} = 13 \text{ mm}. \qquad (35)$$



Slika 3.6. Udaljenosti lokalnih osi od težišnih osi presjeka

Na slici 3.6. prikazane su udaljenosti lokalnih osi pojedinih pravokutnika od težišnih osi presjeka. Oznake u idućoj jednadžbi su primjerice I_y^1 koji označuje moment tromosti presjeka prema osi y za prvi lik u presjeku.

Na temelju te slike možemo izračunati pojedine udaljenosti: $c_1 = 4,5$ mm, $c_2 = 8$ mm, $d_1 = 18$ mm, $d_2 = 32$ mm., a nakon toga momente tromosti presjeka prema težišnim osima:

$$I_y = I_y^1 + I_y^2,\, I_z = I_z^1 + I_z^2,\, I_{yz} = I_{yz}^1 + I_{yz}^2,$$
$$I_y^1 = I_{y1} + d_1^2 A_1,\, I_y^2 = I_{y2} + d_2^2 A_2,\, I_z^1 = I_{z1} + c_1^2 A_1,\, I_z^2 = I_{z2} + c_2^2 A_2, \tag{36}$$
$$I_{yz}^1 = (-c_1)(-d_1)A_1,\, I_{yz}^2 = c_2 d_2 A_2.$$

$$I_y^1 = \frac{80\cdot 10^3}{12} + 80\cdot 10\cdot 18^2 = 265\ \ 866,\dot{6}\ \text{mm}^4,\, I_y^2 = \frac{5\cdot 90^3}{12} + 5\cdot 90\cdot 32^2 = 764\ \ 550\ \text{mm}^4$$
$$I_y = 1\ \ 030\ \ 416,\dot{6}\ \text{mm}^4$$
$$I_z^1 = \frac{80^3\cdot 10}{12} + 80\cdot 10\cdot 4,5^2 = 442\ \ 866,\dot{6}\ \text{mm}^4,\, I_z^2 = \frac{5^3\cdot 90}{12} + 90\cdot 5\cdot 8^2 = 29\ \ 737,5\ \text{mm}^4 \tag{37}$$
$$I_z = 472\ \ 604,1\dot{6}\ \text{mm}^4$$
$$I_{yz}^1 = 80\cdot 10\cdot(-4,5)(-18) = 64\ \ 800\ \text{mm}^4,\, I_{yz}^2 = 90\cdot 5\cdot 8\cdot 32 = 115\ \ 200\ \text{mm}^4$$
$$I_{yz} = 180\ \ 000\ \text{mm}^4.$$

Glavne težišne momente i osi tromosti presjeka računamo prema:

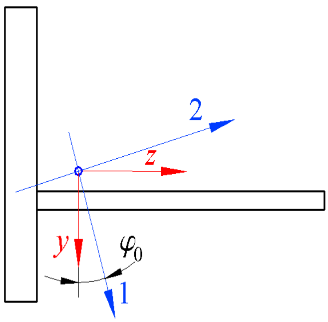
$$I_{1,2}=\frac{I_y+I_z}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{I_y-I_z}{2}\right)^2+I_{yz}^2}=$$

$$\frac{1\,030\,416,\dot{6}+472\,604,1\dot{6}}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1\,030\,416,\dot{6}-472\,604,1\dot{6}}{2}\right)^2+180\,000^2}=$$

$$751\,510,416\,7\pm331\,946,827\,5\Rightarrow I_1=1\,083\,457,244\text{ mm}^4,\ I_2=419\,563,589\text{ mm}^4 \tag{38}$$

$$\tan(2\varphi_0)=\frac{2\cdot180\,000}{1\,030\,416,\dot{6}-472\,604,1\dot{6}}\Rightarrow\varphi_0=16,419°.$$

Rezultat proračuna prikazat ćemo na presjeku, slici 3.7., jer tako najbolje dočaravamo što predstavlja kut φ_0.

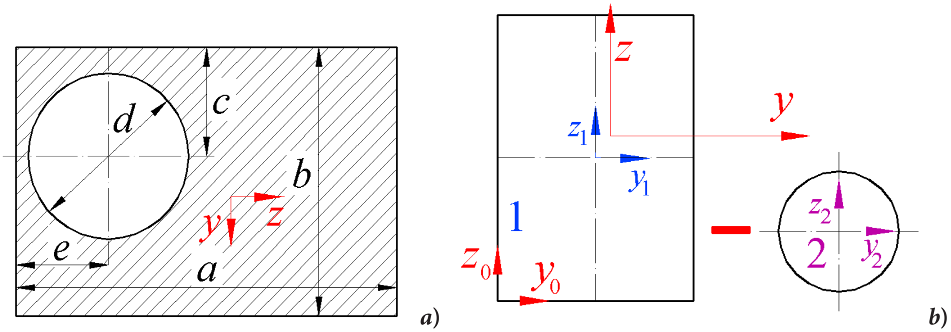


Slika 3.7. Glavne težišne osi tromosti presjeka

Primjer 3.2. Glavni težišni momenti tromosti presjeka za pravokutni profil s okruglom šupljinom

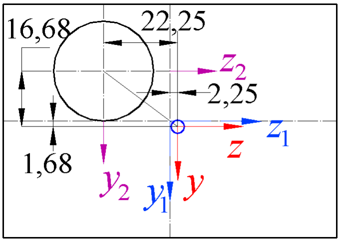
Treba odrediti glavne težišne momente i osi tromosti presjeka za presjek prikazan na slici 3.8.a). Zadano je: a = 100 mm, b = 70 mm, c = 20 mm, d = 30 mm, e = 30 mm.

Ovdje ćemo koristiti pristup oduzimanja kruga kao „negativne" površine, tj. praznine, od „punog" pravokutnika radi lakšeg izračunavanja momenta tromosti presjeka. Težište i momente tromosti presjeka izračunavamo promatrajući presjek kao pozitivnu površinu pravokutnika i negativnu površinu kruga. Težište presjeka računamo prema:



Slika 3.8. Pravokutni presjek: a) geometrija i b) presjek kao razlika pravokutnika i kruga

Nadalje računamo momente tromosti presjeka prema težišnim osima presjeka u skladu sa slikom 3.9.



Slika 3.9. Odmaci osi pojedinih dijelova presjeka od težišnih presjeka

$$
\begin{aligned}
I_y^1 &= \frac{70 \cdot 100^3}{12} + 100 \cdot 70 \cdot 2{,}25^2 = 5\,868\,770{,}8\dot{3}\ \text{mm}^4,\\
I_y^2 &= -\left(\frac{\pi \cdot 30^4}{64} + 22{,}25^2 \cdot \pi \cdot 30^2 / 4\right) = -389\,699{,}5\ \text{mm}^4,\\
I_y &= 5\,479\,071{,}\dot{3}\ \text{mm}^4,\\
I_z^1 &= \frac{70^3 \cdot 100}{12} + 100 \cdot 70 \cdot 1{,}68^2 = 2\,878\,090{,}1\dot{3}\ \text{mm}^4,\\
I_z^2 &= -\left(\frac{30^4 \cdot \pi}{64} + 16{,}68^2 \cdot 30^2 \pi / 4\right) = -236\,443{,}8\ \text{mm}^4,\\
I_z &= 2\,641\,646{,}32\ \text{mm}^4,\\
I_{yz}^1 &= 100 \cdot 70 \cdot (-2{,}25)(-1{,}68) = 26\,460\ \text{mm}^4,\\
I_{yz}^2 &= -30^2 \pi / 4 \cdot (-22{,}25)(-16{,}68) = -262\,336\ \text{mm}^4,\\
I_{yz} &= -235\,876\ \text{mm}^4.
\end{aligned}
\tag{39}
$$

Glavne težišne momente i osi tromosti presjeka računamo prema:

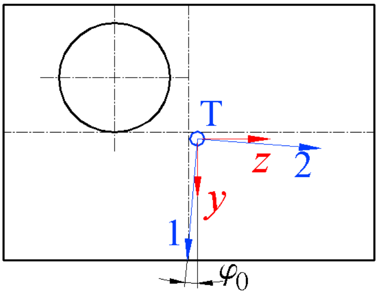
$$I_{1,2}=\frac{I_y+I_z}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{I_y-I_z}{2}\right)^2+I_{yz}^2}=$$

$$\frac{5\,479\,071,\dot{3}+2\,641\,646,32}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{5\,479\,071,\dot{3}-2\,641\,646,32}{2}\right)^2+235\,876^2}= \tag{40}$$

$$4\,060\,358,83\pm 1\,438\,187,28\Rightarrow I_1=5\,498\,546,11\text{ mm}^4,\ I_2=2\,622\,171,55\text{ mm}^4,$$

$$\tan(2\varphi_0)=\frac{2\cdot(-235\,876)}{5\,479\,071,\dot{3}-2\,641\,646,32}\Rightarrow\varphi_0=-4,72°.$$

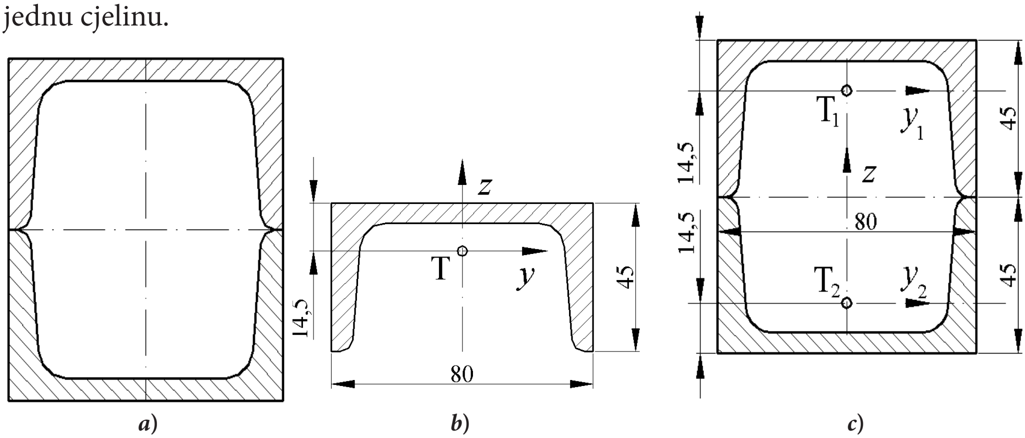
Presjek s ucrtanim glavnim težišnim osima tromosti prikazan je na slici 3.10.



Slika 3.10. Glavne težišne osi tromosti presjeka

Primjer 3.3. Glavni težišni momenti tromosti presjeka od standardnih vruće valjanih U profila

Treba odrediti glavne težišne momente i osi tromosti za presjek prikazan na slici 3.11.a). Presjek je sačinjen od dva zrcalno postavljena standardna vruće valjana profila U 80. Spojeni su zavarenim spojem tako da čine (deformiraju se) jednu cjelinu.



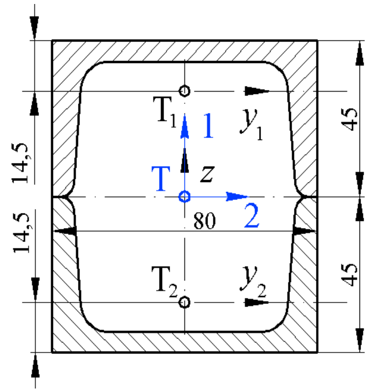
Slika 3.11. Kutijasti profil od dva zrcalno postavljena U 80 profila: a) geometrija, b) orijentacija težišnih osi tromosti i c) kote težišta

Vruće valjani profil U 80 je simetrični profil, što znači da mu je za težišne osi devijacijski moment tromosti površine jednak nuli. Ukupni kutijasti profil je dvostruko simetričan pa mu je devijacijski moment tromosti površine također jednak nuli. Aksijalni momenti tromosti koje izračunavamo za težište cijelog presjeka bit će ujedno i glavni težišni momenti tromosti. Težište kutijastog presjeka se može vrlo lako odrediti i bez izračunavanja jer se nalazi na presjecištu ravnina (osi) simetrije, tj. na sredini visine i širine presjeka. Za standardne profile mnoge geometrijske karakteristike presjeka ne računamo na temelju osnovnih jednadžbi jer bi to u većini slučajeva bilo vrlo teško (primjerice U 80 ima prijelazne radijuse, kosine), već očitavamo te brojeve iz kataloga ili priručnika, na primjer iz Strojarskog priručnika Bojana Krauta. Iz njega možemo iščitati da je za $\mathrm{U\ 80}: \ A = 11\ \mathrm{cm}^2,\ I_y = 6{,}36\ \mathrm{cm}^4,\ I_z = 106\ \mathrm{cm}^4$. Orijentacija osi za U profil za koju su očitane vrijednosti prikazana je na slici 3.11.b). Mjere i kote položaja težišta prikazani su na slici 3.11.c).

Osi presjeka postavit ćemo onako kako su postavljene u priručniku, tj. os *y* postavit ćemo „vodoravno", a os *z* vertikalno. Težišne momente tromosti presjeka izračunat ćemo tada ovako:

$$I_y = 2\left[I_{y2} + A\left(45 - 14{,}5\right)^2\right] = 2\left[63\,600 + 1100\left(45 - 14{,}5\right)^2\right] =$$
$$2\,173\,750\ \mathrm{mm}^4 = 217{,}375\ \mathrm{cm}^4,$$
$$I_z = 2I_{z2} = 2 \cdot 1\,060\,000 = 2\,120\,000\ \mathrm{mm}^4 = 212\ \mathrm{cm}^4, \tag{41}$$
$$I_1 = I_y = 2\,173\,750\ \mathrm{mm}^4 = 217{,}375\ \mathrm{cm}^4,$$
$$I_1 = I_z = 2\,120\,000\ \mathrm{mm}^4 = 212\ \mathrm{cm}^4.$$

Za I_z nema Steinerovog dodatka jer obje težišne osi *z* pojedinih presjeka (likova) leže (poklapaju se) na težišnoj osi *z* kutijastog (ukupnog) presjeka. Devijacijski težišni moment tromosti presjeka jednak je nuli jer je kutijasti presjek dvostruko simetričan. Izračunati težišni momenti tromosti su ujedno glavni težišni momenti tromosti, kao i osi. Os 1 je os *y*, a os 2 je os *z*, što je prikazano na slici 3.12.



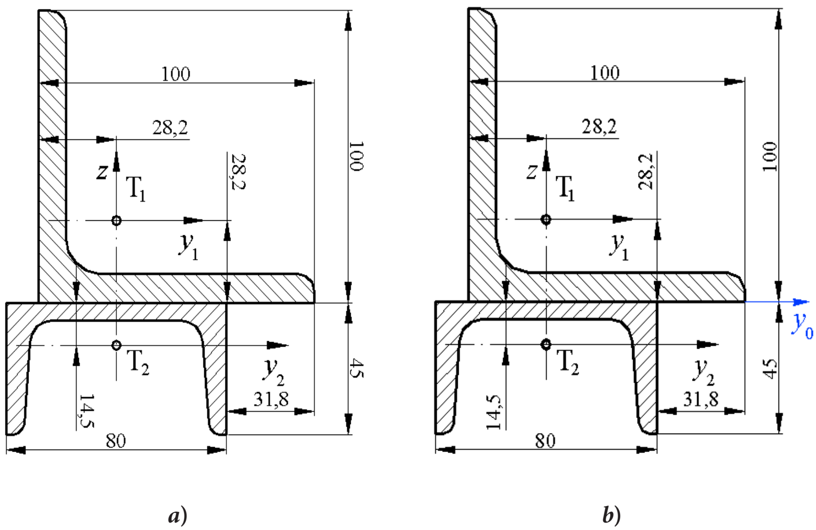
Slika 3.12. Glavne težišne osi tromosti

Primjer 3.4. Glavni težišni momenti tromosti presjeka od standardnih vruće valjanih profila

Treba odrediti glavne težišne momente i osi tromosti presjeka za presjek prikazan na slici 3.13.a) Presjek je sačinjen od dva standardna vruće valjana profila, U 80 i L 100 x 100 x 10 koji su spojeni zavarenim spojem tako da čine (deformiraju se) jednu cjelinu. Karakteristike profila su:

U 80 : $A_2 = 11\ \text{cm}^2$, $I_{y2} = 6{,}36\ \text{cm}^4$, $I_{z2} = 106\ \text{cm}^4$,

L 100x100x10 : $A_1 = 1810\ \text{mm}^2$, $I_1 = 2{,}7\cdot10^6\ \text{mm}^4$, $I_2 = 6{,}95\cdot10^5\ \text{mm}^4$, $\varphi_0 = 45^\circ$.



Slika 3.13. U 80 i L 100 x 100 x 10 spojeni profili: a) geometrija i kote i b) pomoćni koordinatni sustav

Za kutne profile često su u priručnicima i katalozima prikazani glavni težišni momenti i kut, umjesto aksijalnih i devijacijskog, pa ćemo za izračun morati preračunati dostupne podatke prema:

$$\begin{gathered}
2\varphi_0 = 90° \Rightarrow \tan\left(2\varphi_0\right) = \infty \Rightarrow \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z} = \infty \Rightarrow I_y - I_z = 0. \Rightarrow I_y = I_z, \\
I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} = \frac{2I_y}{2} \pm \sqrt{I_{yz}^2} = I_y \pm \left|I_{yz}\right|, \\
I_1 = 2,7 \cdot 10^6 = I_y + \left|I_{yz}\right|. \rightarrow \left|I_{yz}\right| = 2,7 \cdot 10^6 - I_y, \\
I_2 = 6,95 \cdot 10^5 = I_y - \left|I_{yz}\right|. \rightarrow 6,95 \cdot 10^5 = I_y - \left(2,7 \cdot 10^6 - I_y\right), \\
2,7 \cdot 10^6 + 6,95 \cdot 10^5 = 2I_y \Rightarrow I_y = 1,697 \cdot 10^6 \text{ mm}^4. \left|I_{yz}\right| = 1,003 \cdot 10^6 \text{ mm}^4.
\end{gathered} \tag{42}$$

Zasad ne možemo jednoznačno odrediti predznak devijacijskog momenta tromosti jer je kut rotacije koordinatnog sustava za glavne osi definiran od osi za koju je aksijalni moment tromosti veći, no kako su u ovom slučaju oba jednaka, teško je otkriti je li kut φ_0 pozitivan ili negativan. Pritom će nam pomoći značenje devijacijskog momenta tromosti presjeka, a to je, jednostavno rečeno, umnožak ploštine dijela presjeka koji zasad promatramo s koordinatama težišta u promatranom koordinatnom sustavu kroz težište presjeka 1, L profila. Taj profil, radi lakšeg uočavanja pojednostavljenog određivanja predznaka devijacijskog momenta tromosti, promatramo kao zbroj „skoro" vodoravnog pravokutnika, do osi *z,* pa „kutnog" dijela koji sadrži prijelazni radijus, do osi y_1, te vertikalnog pravokutnika, od osi y_1. Prvi pravokutnik ima težište u negativnom dijelu po osi z, i pozitivnom po osi y_1, stoga je njegov umnožak *Ayz* negativan, kakav je i za drugi pravokutnik, samo obrnutih predznaka koordinata težišta. Kutni dio ima obje koordinate negativne, što daje pozitivan umnožak, no ploštinom je manji od oba pravokutnika, a i koordinate težišta su mu manje od pravokutnika. Stoga se može zaključiti da su dva pribrojnika negativna, jedan, onaj manji, je pozitivan, pa je devijacijski moment tromosti negativan. To prema jednadžbi (34) znači potvrdu da je za negativan devijacijski moment tromosti kut mjeren od osi *z* prema osi *y*, što je negativan kut.

Prvi je korak pronalaženje težišta presjeka. Za to se najprije odabire pomoćni koordinatni sustav, prikazan na slici 3.13.b). Odabir tog sustava je proizvoljan i ne utječe na izračun koordinata težišta lika. Ponekad izbor pomoćnoga koordinatnog sustava može malo olakšati izračun ili očitavanje koordinata težišta pojedinih likova sastavnica cijeloga lika. Ovdje se može relativno povoljno postaviti ishodište pomoćnoga koordinatnog sustava na plohu dodira dvaju profila, odnosno na liniju spoja težišta profila. Unaprijed se može reći da će težište cijelog lika biti na spojnici dvaju težišta profila. Nakon toga se izračunavaju koordinate težišta lika:

$$z_{\mathrm{T}} = \frac{A_1 z_1 + A_2 z_2}{A_1 + A_2} = \frac{1\,810 \cdot 28{,}2 + 1100 \cdot (-14{,}5)}{1\,810 + 1100} = 12{,}06 \text{ mm.} \tag{43}$$

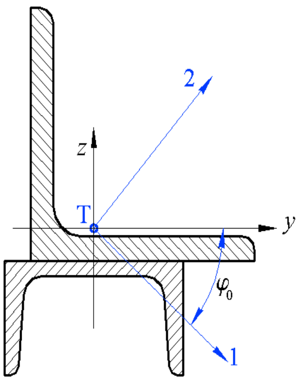
Sada se za svaki od dijelova presjeka (profila) izračunava „doprinos" u momentu tromosti površine prema:

$$\begin{gathered} I_y^1 = 1{,}003 \cdot 10^6 + 1\,810 \cdot (28{,}2 - 12{,}06)^2 = 1\,474\,504{,}3 \text{ mm}^4, \\ I_y^2 = 6{,}36 \cdot 10^4 + 1100 \cdot (-14{,}5 - 12{,}06)^2 = 839\,577 \text{ mm}^4, \\ I_y = 2\,314\,081{,}3 \text{ mm}^4, \\ I_z^1 = 1{,}003 \cdot 10^6 \text{ mm}^4,\ I_z^2 = 1{,}06 \cdot 10^6 \text{ mm}^4, \\ I_z = 2{,}063 \cdot 10^6 \text{ mm}^4, \\ I_{yz}^1 = -1{,}003 \cdot 10^6 + 1\,810 \cdot (28{,}2 - 12{,}06)(0) = -1{,}003 \cdot 10^6 \text{ mm}^4, \\ I_{yz}^2 = 0 + 1100 \cdot (-12{,}06 - 14{,}5)(0) = 0 \text{ mm}^4, \\ I_{yz} = -1{,}003 \cdot 10^6 \text{ mm}^4. \end{gathered} \tag{44}$$

$$\begin{gathered} I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} = \\ \frac{2\,314\,081{,}3 + 2{,}063 \cdot 10^6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2\,314\,081{,}3 - 2{,}063 \cdot 10^6}{2}\right)^2 + \left(-1{,}003 \cdot 10^6\right)^2} = \\ 2\,188\,541 \pm 1{,}010\,83 \cdot 10^6 \Rightarrow I_1 = 2\,188\,541 + 1{,}010\,83 \cdot 10^6 \approx 3{,}2 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \\ I_2 = 2\,188\,541 - 1{,}010\,83 \cdot 10^6 \approx 1{,}177\,7 \cdot 10^6 \text{ mm}^4, \end{gathered} \tag{45}$$

$$\tan(2\varphi_0) = \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z} = \frac{-2 \cdot 1{,}010\,83 \cdot 10^6}{2\,314\,081{,}3 - 2{,}063 \cdot 10^6} = -8{,}051\,8 \Rightarrow 2\varphi_0 = -82{,}92°.\ \varphi_0 = -41{,}46°.$$

Na slici 3.14. prikazana je orijentacija glavnih težišnih osi tromosti presjeka.



Slika 3.14. Orijentacija glavnih težišnih osi tromosti presjeka

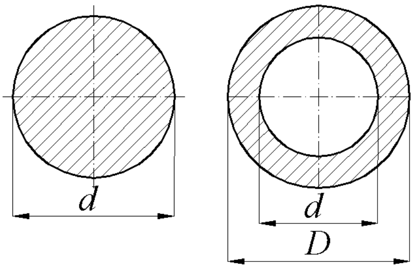
3.3. Polarni momenti tromosti

Za okrugle presjeke izračun polarnog momenta tromosti je relativno jednostavan. Za izračunavanje se koristi jednadžba (31) pa će na primjeru proračuna jednakog polarnog momenta tromosti za odabrani puni presjek i traženje prstenastog presjeka istog polarnog momenta tromosti, uz neko ograničenje, biti prikazano izračunavanje.

Primjer 3.5. Polarni momenti tromosti presjeka

Treba odrediti mjere prstenastog kružnog presjeka koji ima jednak polarni moment tromosti kao i puni okrugli presjek promjera d = 30 mm, uz uvjet da je omjer debljine stijenke prema vanjskom promjeru najmanje s/D = 0,05. Treba prikazati tri različita prstenasta presjeka.

Za izračun polarnog momenta tromosti presjeka prstenasti presjek možemo prikazati kao puni presjek s oduzetim krugom presjeka odnosno šupljinom. Usporedne mjere (kote) punog i prstenastog presjeka prikazane su na slici 3.15.



Slika 3.15. Puni (lijevo) i prstenasti (desno) presjek s kotama

Za prstenasti presjek debljina stijenke s povezana je s kotama promjera prema $D = d + 2s$. U jednadžbi koja će poslužiti za traženje vanjskog promjera uz određenu relativnu debljinu stijenke prema promjeru uvodimo poveznicu debljine stijenke i promjera pa parametarski računamo polarne momente tromosti prema:

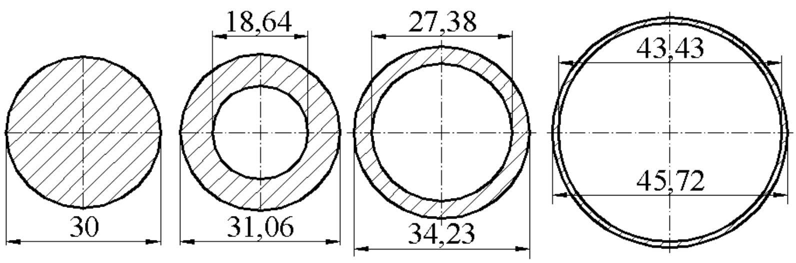
$$I_{\mathrm{p1}} = d^4\pi / 32 = 30^4\pi / 32 = 79\,521{,}564\ \mathrm{mm}^4.$$

$$I_{\mathrm{p2}} = \left(D^4 - d^4\right)\pi / 32. \left| \begin{array}{l} d = D - 2s \\ d = D - 2\dfrac{s}{D}D,\ \dfrac{s}{D} = \alpha \\ d = D\left(1 - 2\alpha\right);\alpha \in \left\langle 0,\ 0{,}25\right]. \end{array} \right| \qquad (46)$$

Možda je najjednostavnije izračunati parametarski u računalnom programu MS Office Excel, no na koji god se način izračun provede, u tablici 1 bit će prikazani odabrani parametri omjera debljine stijenke prema vanjskom promjeru α i dobiveni vanjski i unutrašnji promjeri s jednakim polarnim momentom tromosti kao u puni presjek promjera 30 mm. Uz to je zanimljiv omjer ploštine presjeka punog i prstenastog oblika jer to ukazuje na utrošeni materijal, težinu strojnog dijela i sl. Za izračun nekog α, matematički rečeno, koristi se metoda prediktor – korektor, tj. metoda pokušaj – pogreška. Slobodna veličina je D, pa u jednostavnim načinima proračuna, osoba koja proračunava procjenjuje koliki promjer treba staviti u idućem koraku proračuna, prema grešci ili razlici izračunatog I_p prema traženom. Napredniji način je da se pokuša izvesti oblik $D = f(\alpha)$, što je ili teško ili nemoguće s funkcijom varijable na četvrtu potenciju. Nešto naprednije od procjene i tipkanja (trženja) promjera je algoritam koji će do tražene točnosti tražiti promjer prema zadanom parametru α. Na slici 3.16. prikazani su presjeci dobiveni i prikazani u tablici 1, za usporedbu prema punom presjeku 30 mm.

Tablica 1. Usporedba prestenastih presjeka istog polarnog momenta tromosti kao puni presjek od 30 mm

s/D	D, mm	s, mm	d, mm	I_p, mm^4	A, mm^2	relativna ploština A/A_0
0,4	31,06	12,424	18,636	79 528,83	484,923	0,686
0,2	34,23	6,846	27,384	79 574,49	331,289	0,469
0,05	45,72	2,286	43,434	79 570,86	160,069	0,226

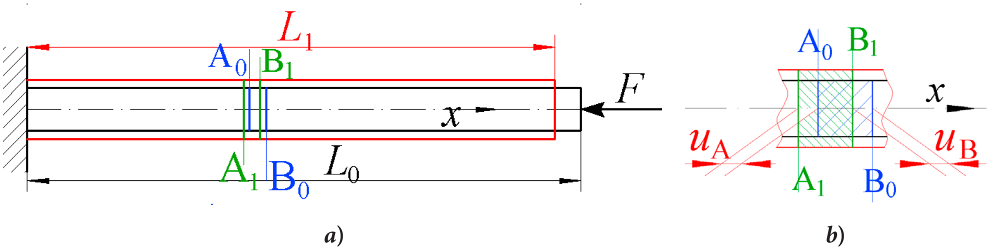


100 % *A* 68,6 % *A* 46,9 % *A* 22,6 % *A*

Slika 3.16. Usporedba mjer a okruglih profila istog polarnog momenta tromosti površine

4. AKSIJALNO (UZDUŽNO) OPTEREĆENI ŠTAPOVI

Kada se ograničimo na promatranje štapa stalnog poprečnog presjeka, jednostavno opterećenog, tako da je uzdužna sila stalna, a svojstva materijala konstantna, očekujemo da su uvjeti i promjene svugdje isti. To nam govori da će promjena geometrije, odnosno deformacija, biti svugdje ista, pa dolazimo do raspodjele naprezanja uzduž takvog štapa (ili dijela štapa na kojem su presjek, sila i materijal stalni), koja je stalna. Na nekom presjeku, uzduž štapa, očekujemo isto naprezanje. Ovo je prikazano na slici 4.1.



Slika 4.1. Deformiranje štapa: a) neopterećeno i deformirano stanje i b) detalj zamišljenih pravokutnika prije i poslije deformiranja

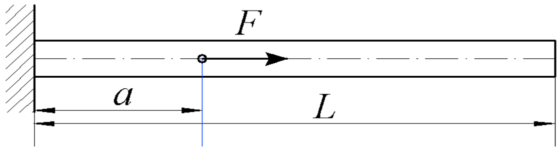
Na slici 4.1.a) crnom je bojom prikazana kontura štapa prije djelovanja sile *F*. Pretpostavimo da je štap pravokutnog presjeka. Plavom je bojom označen zamišljen pravokutnik $A_0 - B_0$ u svrhu praćenja promjena na štapu na tom području. Razmak između vertikalnih dužina je mali u odnosu na duljinu štapa. Detalj deformiranja štapa prikazan je preko zamišljenih dužina na slici 4.1.b). Šrafirani pravokutnik u plavoj boji označava početno nenapregnuto stanje, dok zeleni šrafirani pravokutnik predstavlja deformirano, napregnuto stanje. Pomak dužine A_0 je manji od pomaka dužine B_0 jer je dužina B_0 dalje od uklještenja, a u ovom je slučaju pomak raspodijeljen linearno od uklještenja prema slobodnom kraju. Na slici 4.3. prikazani su dijagrami duljinske deformacije, naprezanja i pomaka po štapu. Deformacija i naprezanje su svugdje po štapu jednakog iznosa i smjera, dok se pomak mijenja linearno od uklještenja prema slobodnom kraju. Što je presjek dalje od uklještenja, to je više pomaknut u odnosu na svoj položaj prije opterećenja u istom koordinatnom sustavu. Principijelno je duljinska deformacija određena kao derivacija pomaka *u* po koordinati *x* [1], no mi ćemo za potrebe proračuna štapova opterećenih uzdužnim silama koristiti „gotovu" jednadžbu za promjenu duljine dijela štapa za koji vrijedi: $N_x, A, E = \text{konst.}$

$$\Delta l = \frac{N_x l}{AE}. \tag{47}$$

U slučaju promjenjive uzdužne sile ili poprečnog presjeka ili svojstava materijala možemo izračunati pomake pojedinih točaka koristeći jednadžbu (47) kako je prikazano u primjeru 4.1.

4.1. Deformiranje štapa konstantnog presjeka

Najjednostavniji slučaj osnog opterećenja štapa je štap uklješten na jednom svom kraju i opterećen silom na drugom svom kraju. Za potrebe opisivanja pomaka krutog tijela, što će biti korisno kasnije u poglavlju, prikazana je analiza pomaka točaka (defomiranja) štapa prema slici 4.2.

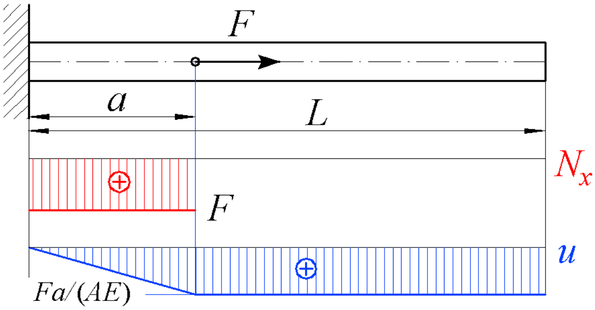


Slika 4.2. Štap konstantnog presjeka opterećen silom

Štap na slici 4.2. opterećen je silom između svojih krajeva. Ovo znači da je dio štapa od uklještenja do mjesta djelovanja sile opterećen, napregnut, stoga očekujemo da je i deformiran, a dio od sile na desno nije opterećen, napregnut, pa neće biti deformiran. Međutim, on će dobiti pomak u odnosu na neopterećeno stanje, jer je „neprekidan dio" s dijelom koji se deformira. To možemo predočiti kao dva „zalijepljena" štapa, prvi, duljine *a*, koji ima nekakvu ploču koja raspodjeljuje silu *F* po presjeku i koja se produljuje, i drugi, koji se pomiče zbog pomaka desnog „kraja" prvog štapa. Taj se dio pomiče bez deformiranja, odatle i naziv ili izraz „pomak krutog tijela" (ne deformira se = kruto). Na slici 4.3. prikazana je raspodjela uzdužne unutrašnje sile N_x i pomaka uzdužno osi štapa (komponenta pomaka na osi *x*), *u*. Promjenu duljine dijela štapa koji je napregnut računamo prema:

$$\Delta l = u(x=a) = \frac{Fa}{AE},\ u(x=L) = u(x=a) = \frac{Fa}{AE}. \tag{48}$$

Budući da je uzdužna sila stalna na dijelu od 0 do *a*, naprezanje i deformacija su također konstantni pa se tada i svaki susjedni „presjek" od uklještenja udesno jednako rasteže odnosno deformira. Stoga uzdužni pomak postupno (linearno) raste do najveće vrijednosti u točki na koordinati *a*.

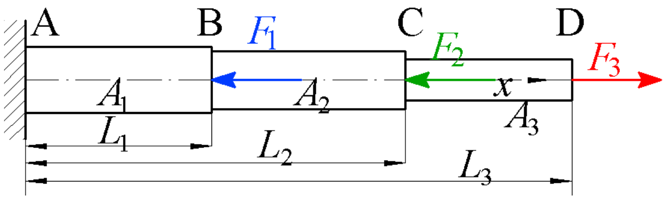


Slika 4.3. Raspodjela uzdužne sile i pomaka

4.2. Deformiranje štapa stupnjevanog presjeka

Primjer 4.1. Deformiranje štapa stupnjevanog presjeka opterećenog s tri sile

Za štap prema slici 4.4. potrebno je izračunati pomak označenih točaka. Zadano je: F_1 = 2000 N, F_2 = 1 000 N, F_3 = 1000 N, A_1 = 20 mm², A_2 = 15 mm², A_3 = 10 mm², L_1 = 1000 mm, L_2 = 500 mm, L_3 = 500 mm, E = 200 000 N/mm².



Slika 4.4. Štap stupnjevanog presjeka opterećen silama

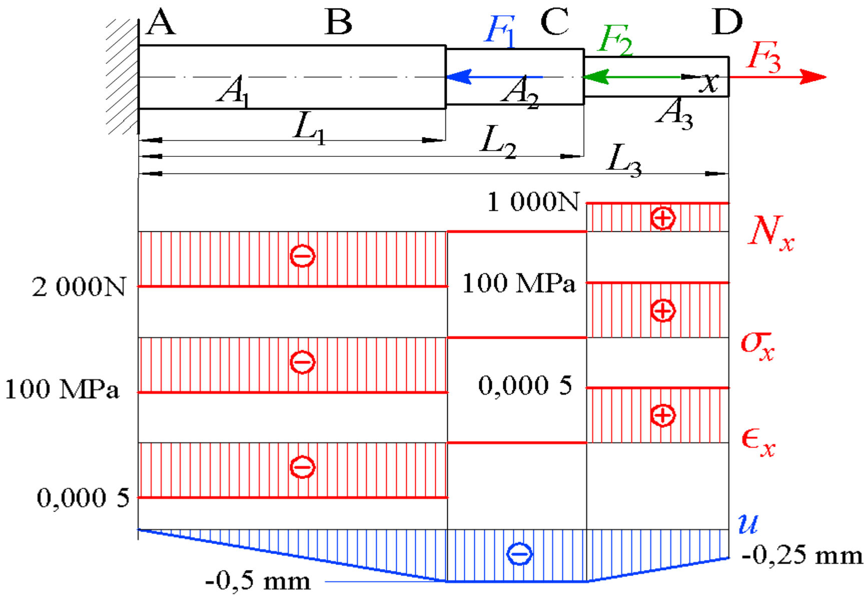
Za izračun pomaka pojedinih označenih točaka koristit ćemo jednadžbu (47). Za početak nam treba raspodjela uzdužne sile po štapu, naprezanja te deformacije. Pomak točke B izračunat ćemo prema jednadžbi (47) uz postavljanje poznatog pomaka na lijevom kraju dijela štapa A-B, što je uklještenje, pa slijedi:

$$u_{\mathrm{A}} = 0,\ u_{\mathrm{B}} = u_{\mathrm{A}} + \frac{N_{\mathrm{A\text{-}B}} L_1}{A_1 E} = 0 + \frac{-2\ 000 \cdot 1\ 000}{20 \cdot 200\ 000} = -0{,}5 \text{ mm}. \tag{49}$$

Prema slici 4.5. na dijelu od točke B do točke C nema uzdužne sile pa taj dio neće promijeniti duljinu, jer nije napregnut, a točka C će imati isti pomak kao točka B, tj. $u_{\mathrm{C}} = u_{\mathrm{B}} + 0 = -0{,}5$ mm. Dalje izračunavamo pomak točke D prema:

$$u_{\mathrm{D}} = u_{\mathrm{C}} + \frac{N_{\mathrm{C\text{-}D}} L_3}{A_3 E} = -0{,}5 + \frac{1\,000 \cdot 500}{10 \cdot 200\,000} = -0{,}25 \text{ mm}. \tag{50}$$

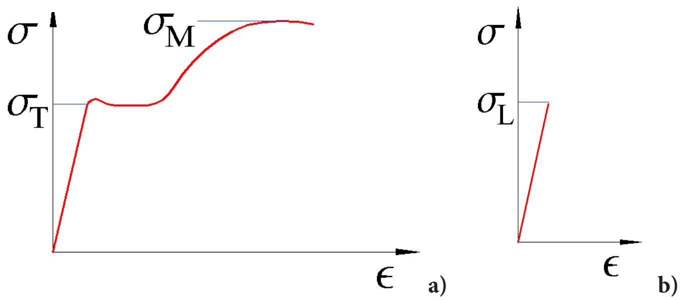
Pomaci po štapu raspodijeljeni su linearno između mjesta na kojima se mijenja presjek ili unutrašnja sila. Ako je naprezanje na nekom dijelu štapa konstantno, a materijal homogen, onda će i prema Hookeovom zakonu i deformacija biti konstantna. Budući da je duljinska deformacija derivacija pomaka po koordinati x [1], tada je pomak koji je integral deformacije linearan. Na dijelu štapa na kojem nema naprezanja, a time ni deformacije, a to je dio od točke B do točke C, pomak je jednak, tj. točka C se ne pomiče u odnosu na (relativno prema) točku B.



Slika 4.5. Dijagrami uzdužne sile, naprezanja, deformacije i pomaka za štap

4.3. Dopušteno naprezanje

Najznačajniji ishod analize elemenata strojeva i konstrukcija u kontekstu strojarstva je zadovoljavanje funkcije dimenzioniranjem, tj. dodavanjem poprečne mjere na neka ograničenja u obliku ili duljini kako bi štap zadovoljio funkciju. To davanje mjera presjeku zovemo dimenzioniranje. Dimenzioniramo prema principu poznavanja raspodjele naprezanja po presjeku za neku vrstu opterećenja, poznavanja svojstava materijala, ponašanja materijala u određenim uvjetima, traženja najvećeg naprezanja po presjeku te postavljanja zahtjeva da je najveće naprezanje manje od dopuštenog za dane uvjete i zadani (odabrani) materijal. Dopušteno naprezanje izračunavamo za mirno opterećenje (statičko) najčešće prema Hookeovom dijagramu, tj. na temelju podataka iz Hookeovog dijagrama dobivenog pri rastezanju materijala. Simbolični Hookeov dijagram za duktilni konstrukcijski čelik, od kojeg su vrlo često izrađeni dijelovi konstrukcija i strojeva, prikazan je na slici 4.6.



Slika 4.6. Hookeov dijagram: a) za duktilne materijale i b) za krhke materijale

Na dijagramu na slici 4.6.a) značajna vrijednost naprezanja je σ_e, odnosno σ_T, koju zovemo granica elastičnosti ili granica tečenja. Ispod te vrijednosti naprezanja materijal se ponaša elastično, tj. ako uklonimo opterećenje, silu i štap, ispitni uzorak će se vratiti u prvobitno stanje, bez trajnih promjena. Uklanjanje opterećenja zovemo i rasterećenje. Nakon te vrijednosti naprezanja materijal plastično teče, tj. mijenja se trajno, duljinom i poprečnim presjekom. Nakon rasterećenja nova granica tečenja poprima vrijednost naprezanja s kojeg je počelo rasterećenje. Na slici 4.6.b) prikazan je dijagram rastezanja krhkog materijala koji nema plastičnosti. Kada dosegne granično naprezanje koje može izdržati, pukne bez pojave plastične deformacije. Takvi su materijali sivi lijev, staklo, neki polimeri i velika većina kompozitnih materijala u kojima su nositelji svojstava ugljična, staklena ili neka druga krhka vlakna.

U dijelovima strojeva i konstrukcija ne želimo da dođe do promjene oblika i mjera, tj. ne želimo plastično tečenje materijala. Plastično tečenje je poželjno prilikom preoblikovanja, primjerice kovanja, prešanja, dubokog vučenja, provlačenja, savijanja radi promjene oblika i sl. Ovo znači da ćemo postaviti granicu na naprezanje u materijalu štapova i svih ostalih dijelova strojeva i konstrukcija na granicu tečenja jer nikako ne želimo dopustiti pojavu plastičnog tečenja. Međutim, moramo uzeti u obzir i jednu nepovoljnu činjenicu, a to je da su sile, momenti i raspodijeljena opterećenja koja crtamo kao opterećenja štapova i nosača, koja su obično zadane vrijednosti, u stvarnosti posljedica međudjelovanja konstrukcije koju proračunavamo i okoline, ili drugih dijelova stroja ili konstrukcija. Uvijek postoji neka razina nesigurnosti u predviđene vrijednosti opterećenja, stoga moramo razmišljati što je s nesigurnim „dijelom" vrijednosti opterećenja, tj. kako osigurati funkcioniranje dijela stroja ili konstrukcije, a time i cjeline ako se dogodi povećana vrijednost opterećenja. Iz tog razloga uvodimo faktor sigurnosti koji predstavlja broj kojim se „odmičemo" od granice tečenja prema dolje, svojim najvećim naprezanjem u primjerice štapu, kako bismo imali neku zonu sigurnosti od plastičnog tečenja ako se i dogodi povećano opterećenje, koje ne uzimamo u normalnom radu, koji nazivamo – nominalni uvjeti rada.U slučaju krhkih materijala, odmičemo se na isti način od granice loma, σ_L.

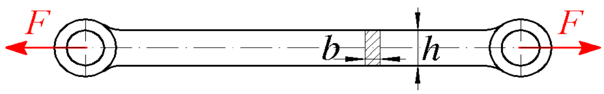
Faktor sigurnosti je često označen sa S, f_s, β_s. Dopušteno naprezanje izračunavamo prema:

$$\sigma_{\mathrm{dop}} = \sigma_{\mathrm{T}} / f_s, \quad \sigma_{\mathrm{dop}} = \sigma_{\mathrm{L}} / f_s. \qquad (51)$$

Vrijednost faktora sigurnosti je uvijek veća od 1, a obično je od 1,25 naviše, sve do 12 za užad dizala za prijevoz osoba.

Primjer 4.2. Dimenzioniranje jednostavnog štapa

Za štap prikazan na slici 4.7. treba odrediti mjere poprečnog pravokutnog presjeka ako je štap izrađen od konstrukcijskog čelika St37 (S235). Provrti za prihvat svornjaka (osovine) na krajevima ne uzrokuju koncentraciju naprezanja. Zadano je: F = 5000 N, f_s =1,5, b/h = 0,25.



Slika 4.7. Jednostavan štap opterećen silama

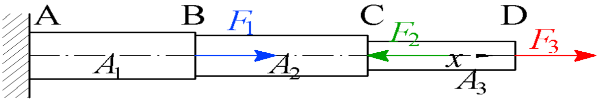
Materijal označen St37, odnosno S235, je konstrukcijski čelik s granicom tečenja (za debljine do 16 mm) od 235 N/mm² ili MPa. Dopušteno naprezanje izračunat ćemo prema: $\sigma_{\mathrm{dop}} = \sigma_{\mathrm{T}} / f_s = 235 / 1,5 = 156$ MPa. Štap ima jednolik poprečni presjek i konstantnu uzdužnu silu pa dimenzioniranje provodimo ograničavanjem najvećeg naprezanja (za osno opterećene štapove smatramo da je po presjeku konstantno naprezanje) prema dopuštenom naprezanju:

$$\begin{gathered} \sigma_x = F / A = F / (bh) < \sigma_{\mathrm{dop}}, \\ 0,25h \cdot h > F / \sigma_{\mathrm{dop}} \Rightarrow h^2 > 4F / \sigma_{\mathrm{dop}} \Rightarrow h > \sqrt{4F / \sigma_{\mathrm{dop}}}, \\ h > \sqrt{4 \cdot 5\,000 / 156} = 11,323 \text{ mm } (12 \text{ mm}).\ b = 3 \text{ mm}. \end{gathered} \qquad (52)$$

Na početku je zadan omjer stranica poprečnog presjeka kako ne bismo imali beskonačno mnogo točnih rješenja, nego samo jedno. U rješenju (52) u zadnjem redu u zagradi prikazana je „zaokružena" mjera visine presjeka jer je ta dobavljiva u željezarama. Standardni vruće valjani plosnati („flah") čelični profil ima presjek 12 x 3 mm, no postoji još jedan detalj o kojem treba misliti, a to je tehnologičnost izrade ovakvog štapa. Štap prema slici 4.7. ima očice visine veće od presjeka, što znači da ih treba nekako izraditi. Najjednostavnije i najvjerojatnije najjeftinije je uzeti plosnati vruće valjani profil presjeka primjerice 20 x 3 mm, što je lako dobavljivo, i iz njega obradom odvajanja čestica, piljenjem ili glodanjem napraviti konačni oblik.

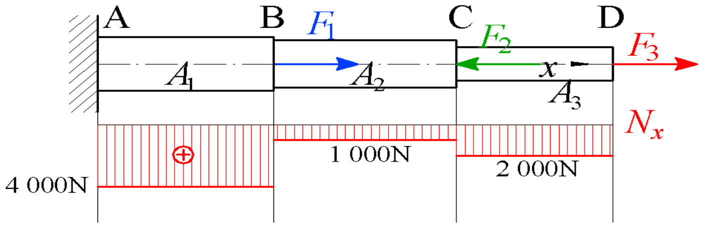
Primjer 4.3. Dimenzioniranje stupnjevanog štapa

Za štap prikazan na slici 4.8. treba odrediti promjere dijelova štapa ako je štap izrađen od konstrukcijskog čelika St37 (S235). Zadano je: F_1 = 3000 N, F_2 = 1000 N, F_3 = 2000 N, f_s =1,5.



Slika 4.8. Stupnjevani štap

Materijal označen St37, odnosno S235, je konstrukcijski čelik s granicom tečenja (za debljine do 16 mm) od 235 N/mm^2 ili MPa. Dopušteno naprezanje izračunat ćemo prema: $\sigma_{\text{dop}} = \sigma_{\text{T}} / f_s = 235/1,5 = 156$ MPa. Duljine pojedinih dijelova štapa nisu bitne jer ne računamo pomake, već samo ploštine poprečnih presjeka. Za dimenzioniranje nam treba raspodjela uzdužne sile po štapu, što je prikazano na slici 4.9.

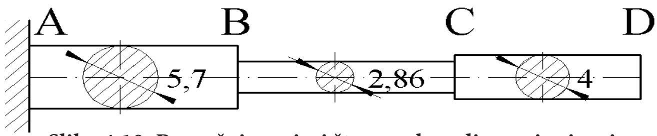


Slika 4.9. Dijagram uzdužne sile u štapu

Dimenzioniranju ovdje pristupamo na osnovi optimiranja. Svaki dio štapa bit će dimenzioniran tako da je materijal svugdje najbolje iskorišten prema:

$$
\begin{gathered}
N_x^1 = 4\,000 \text{ N} \Rightarrow \sigma_x^1 = N_x^1 / A_1 < \sigma_{\text{dop}} \Rightarrow A_1 > N_x^1 / \sigma_{\text{dop}} = 4\,000/156 = 25,64 \text{ mm}^2, \\
A_1 = \pi d_1^2 / 4 \Rightarrow d_1 = \sqrt{4A_1/\pi} = \sqrt{4 \cdot 25,64/\pi} = 5,7 \text{ mm}, \\
N_x^2 = 1\,000 \text{ N} \Rightarrow \sigma_x^2 = N_x^2 / A_2 < \sigma_{\text{dop}} \Rightarrow A_2 > N_x^2 / \sigma_{\text{dop}} = 1\,000/156 = 6,41 \text{ mm}^2, \\
A_2 = \pi d_2^2 / 4 \Rightarrow d_2 = \sqrt{4A_2/\pi} = \sqrt{4 \cdot 6,41/\pi} = 2,86 \text{ mm}, \\
N_x^3 = 2\,000 \text{ N} \Rightarrow \sigma_x^3 = N_x^3 / A_3 < \sigma_{\text{dop}} \Rightarrow A_3 > N_x^3 / \sigma_{\text{dop}} = 2\,000/156 = 12,82 \text{ mm}^2, \\
A_3 = \pi d_3^2 / 4 \Rightarrow d_3 = \sqrt{4A_3/\pi} = \sqrt{4 \cdot 12,82/\pi} = 4,04 \text{ mm}.
\end{gathered}
\tag{53}
$$

Na temelju rješenja iz (53) možemo nacrtati presjeke u mjerilu, kao na slici 4.10.



Slika 4.10. Poprečni presjeci štapa nakon dimenzioniranja

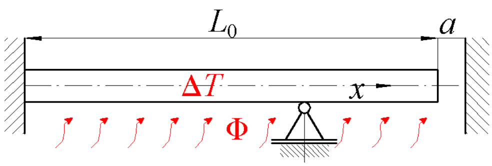
4.4. Temperaturno deformiranje štapova. Nelinearnost ponašanja štapa

U mnogim područjima strojarstva ponašanje (npr. deformiranje, izračunavanje naprezanja i sl. dijelova strojeva i konstrukcija) je linearno. Linearno ponašanje, vrlo jednostavno rečeno, podrazumijeva proporcionalnost odnosa opterećenja i naprezanja. Ako u nekom opterećenom dijelu stroja, primjerice osovini, opterećenje poraste za 10 %, a i naprezanje poraste isto za 10 %, tada će ponašanje te osovine biti linearno. Ako uzdužna sila djeluje na osovinu, ležaji će omogućiti proporcionalno deformiranje, tj. produljivanje i skraćivanje, a u linearnom području za naprezanje u materijalu možemo očekivati linearno ponašanje osovine. Jedan primjer linearnog ponašanja statički neodređenog štapa prikazan je u idućem poglavlju. Međutim, ako štap svojim spojevima (vezama) s okolinom ima uvjete da malo veće opterećenje ne znači i malo veće naprezanje (ili uopće ikakvo), onda je ponašanje (deformiranje) takvog elementa nelinearno. U idućem će primjeru biti prikazan proračun nelinearnog ponašanja jednostavnog štapa.

Primjer 4.4. Deformiranje štapa povišenjem temperature

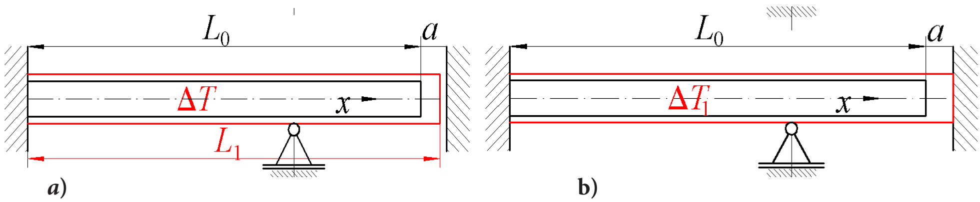
Za štap prikazan na slici 4.11. treba odrediti naprezanje u štapu s promjenom temperature. Štap je izrađen od konstrukcijskog čelika St37 (S235). Zglobni pomični oslonac omogućuje uzdužno deformiranje (promjenu duljine) i sprječava savijanje.

Zadano je: L_0 = 1000 mm, a = 0,2 mm, E = 200 000 MPa, ΔT = 50 K, $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$.



Slika 4.11. Štap opterećen toplinom sa zračnosti prema krutoj stijenci

Pretpostavka je da toplinski tok Φ svugdje u štapu uzrokuje jednoliko ugrijavanje, odnosno povišenje temeperature, pa možemo jednostavno opisati promjenu duljine štapa s povišenjem temperature. Štap se produljuje linearno do trenutka (pri nekoj promjeni temperature ΔT_1) doticanja krute stijenke (zida). Produljivanje štapa s povišenjem temperature prikazano je na slici 4.12.a), a trenutak doticanja zida na slici 4.12.b).

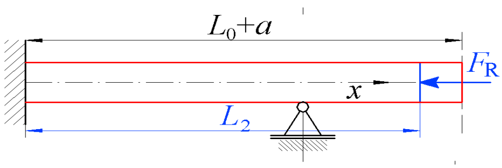


Slika 4.12. Produljivanje štapa: a) do doticanja zida i b) doticanje zida

Temperaturu pri kojoj će desni kraj štapa dotaknuti zid računamo prema:

$$\Delta L_1^T = \alpha \Delta T_1 L_0 = a \Rightarrow \Delta T_1 = a / \left(\alpha L_0 \right) = 0{,}2 / \left(12 \cdot 10^{-6} 1000 \right) = 16{,}\dot{6}\ \mathrm{K}. \qquad (54)$$

Nakon toga zid onemogućuje daljnje produljivanje pa djeluje silom reakcije na štap i uzrokuje unutrašnju tlačnu silu. U cijelom je štapu jednaka tlačna sila jer djeluje na desnom kraju štapa, a reakcija na lijevom kraju je jednakog iznosa. Reakciju u zidu izračunavamo primjenom metode superpozicije, pri čemu zamišljeno oslobađamo štap veze s desnim zidom te računamo koliko bi se štap produljio nakon doticanja zida uslijed daljnjeg ugrijavanja i postavljamo uvjet deformiranja koji predstavlja ograničavanje pomaka. Jednadžbe postavljamo na temelju skice proračunskog modela reakcije prema slici 4.13.



Slika 4.13. Superpozicija djelovanja reakcije u zidu nakon produljenja za a

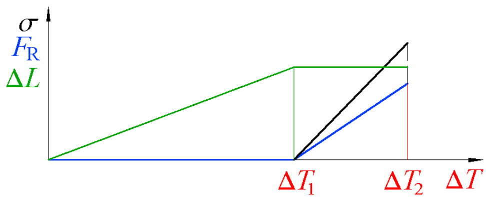
Zamislimo produljenje štapa nakon ΔT_1 slobodno, bez zida. Štap bi do najviše temperature nakon ΔT_2 = 50 K imao produljenje:

$$\Delta L_2^T = \alpha \Delta T_2 L_0 = 12 \cdot 10^{-6} 50 \cdot 1000 = 0{,}6\ \mathrm{mm}. \qquad (55)$$

Reakcija u zidu stoga mora „skratiti" štap, tj. suzbiti produljenje nakon *a* za iznos 0,6 – 0,2 = 0,4 mm. Time možemo izračunati kolika će sila djelovati na kraju ugrijavanja, odnosno, možemo je podijeliti s ploštinom poprečnog presjeka kako bismo odmah izračunali naprezanje u štapu:

$$\Delta L_2^T - \Delta L_1^T + \Delta L_2^F = 0,$$
$$0,4 = F_B L_0 / (AE) \Rightarrow F_B = 0,4AE / L_0 \big| / A \Rightarrow \tag{56}$$
$$\sigma_x = 0,4 \cdot 200\,000 / 1\,000 = 80 \text{ MPa}.$$

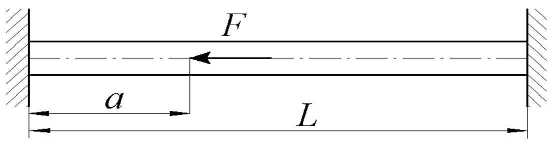
Ove rezultate možemo prikazati u obliku dijagrama radi što jasnijeg prikaza procesa ugrijavanja štapa sa zračnosti prema okolini. Tri su veličine prikazane u ovisnosti o povišenju temperature na slici 4.14.



Slika 4.14. Dijagram promjene duljine, reakcije u zidu i naprezanja s povišenjem temperature

5. STATIČKI NEODREĐENI OSNO OPTEREĆENI ŠTAPOVI

Statički neodređeni štapovi su štapovi koji imaju najmanje jednu vezu s okolinom (oslonac) prekobrojnu prema broju linearno nezavisnih jednažbi ravnoteže koje možemo postaviti. Jedan jednostavan primjer takvoga štapa prikazan je na slici 5.1. Ako štap ima dva uklještenja, kao na slici 5.1., i jednu jednadžbu ravnoteže koju možemo postaviti za izračun uzdužnih reakcija, onda će broj veza s okolinom biti 2, broj jednadžbi ravnoteže 1, pa će razlika tih brojeva biti 1, tj. štap će biti jednostruko statički neodređen.

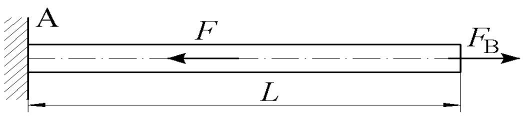


Slika 5.1. Statički neodređen štap opterećen silom

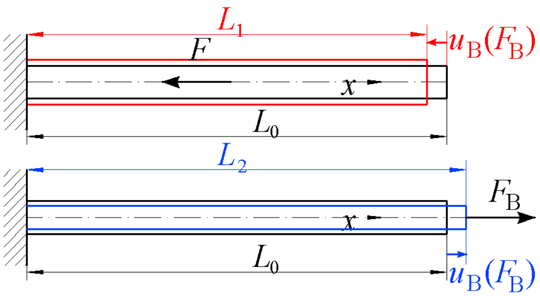
5.1. Linearnost ponašanja štapa. Princip superpozicije

Osnova za proračun statički neodređenih štapova je njihovo linearno ponašanje pri djelovanju silama, tj. općenitije, linearno ponašanje pri opterećenju konstrukcija. To znači da za npr. 10 % veću vrijednost sile (ili povišenja temperature) od zadane, pomaci i naprezanja su 10 % veći. Takvo ponašanje je karakteristično u području linearno elastičnog ponašanja najčešćih materijala od kojih su načinjeni štapovi. Nelinearno ponašanje pojavljuje se u slučaju kada je materijal nelinearno elastičan, ili prelazi u plastično stanje, ili primjerice kod neke geometrijske nelinearnosti, kao prepreka za deformiranje na nekom mjestu, kako je prikazano u prethodnom poglavlju 4.4. U sljedećim ćemo primjerima podrazumijevati da su ostvareni nužni uvjeti za linearno ponašanje štapa.

Nadalje, reakcije u osloncima izračunavamo primjenom principa superpozicije. Najprije moramo opisati statički neodređeni štap ili ga uklanjanjem zamijeniti statički određenim štapom, što je u ovom slučaju jedna veza s okolinom (uklještenje), te zamijeniti te veze reakcijom, kako je prikazano na slici 5.2.a). Značenje riječi superpozicija je pribrajanje jednog rješenja na drugo, u slojevima, pa je ukupna slika pomaka i naprezanja jednaka zbroju slika pomaka i naprezanja uzrokovanih pojedinačnim „uzrocima", u svakom sloju.



a)



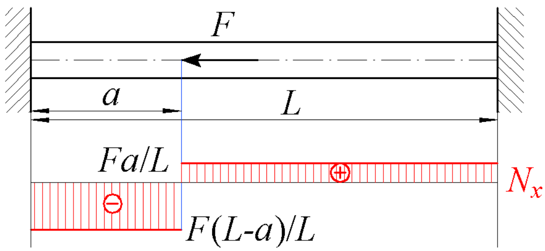
b)

Slika 5.2. Opisivanje štapa statički određenim: a) zamjena uklještenja silom i b) opisivanje deformiranja

Superpoziciju koristimo u opisivanju deformiranja točke B koja je oslobođena veza s okolinom, prema slici 5.2.b). Pomak točke B ima „komponente" uzrokovane aktivnom silom F i reaktivnom silom F_B. Ukupni (stvarni) pomak u točki B jednak je nuli. Pomak točke B, što možemo zvati i uvjet deformiranja, prema principu superpozicije računamo prema:

$$u_B = u_B(F) + u_B(F_B). \tag{57}$$

Pomake u (57) računamo prema: $u_B(F) = -Fa / AE, u_B(F_B) = F_B L / AE$. Koristeći uvjet deformiranja dobijemo reakciju: $Fa / AE = F_B L / AE \Rightarrow F_B = Fa / L$. Na temelju izračunate reakcije u uklještenju B možemo nacrtati dijagram uzdužne sile po štapu koji je prikazan na slici 5.3.

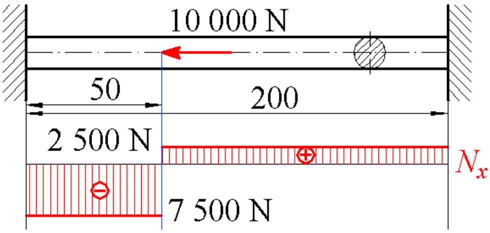


Slika 5.3. Raspodjela uzdužne sile po štapu – opći slučaj

5.2. Dimenzioniranje jednostavnog štapa

Na temelju izračuna raspodjele uzdužne sile za jednostavan statički neodređen štap prema slici 5.3., dimenzionirat ćemo takav štap. Razmatrat ćemo utjecaj različitih karakteristika materijala te granice popuštanja pri rastezanju i sabijanju, i to za odabrane parametre: F = 10 000 N, $a = L/4$, σ_{dop} = 50 MPa, $\sigma_{v,dop}$ = 50 MPa, $\sigma_{t,dop}$ = 100 MPa.

Neki materijali imaju različito ponašanje pri rastezanju („vlaku") i sabijanju („tlaku"). Najizrazitiji primjer od metalnih materijala je vrlo široko primjenjivan sivi lijev. $\sigma_{v,dop}$ je dopušteno naprezanje pri rastezanju, dobiveno na temelju granice loma (lomne čvrstoće σ_L) i faktora sigurnosti. $\sigma_{t,dop}$ je za isti materijal dopušteno naprezanje pri sabijanju. σ_{dop} je dopušteno naprezanje u slučaju da materijal ima jednaka svojstva pri rastezanju i sabijanju. Utjecaj materijalnih svojstava bit će vidljiv kroz potrebni presjek za primjer štapa prema slici 5.3. Raspodjela uzdužne sile za takav štap sa zadanim parametrima prikazana je na slici 5.4.



Slika 5.4. Raspodjela uzdužne sile

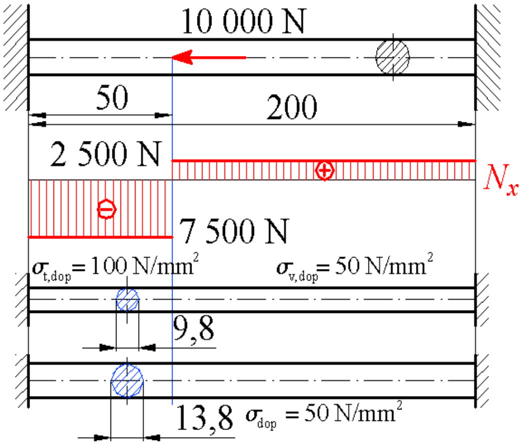
Kada dimenzioniramo štap promatrajući ga s različitim svojstvima u rastezanju i sabijanju, onda dobivamo promjere na dva područja štapa u skladu sa slikom 5.4. prema:

$$\begin{gathered} N_x^1(0-50) = -7\,500\ \text{N} \Rightarrow \sigma_x^1 = \left|N_x^1\right| / A_1 < \sigma_{t,dop} \Rightarrow A_1 > \left|N_x^1\right| / \sigma_{t,dop} = 7\,500/100 = 75\ \text{mm}^2, \\ A_1 = \pi d_1^2/4 \Rightarrow d_1 = \sqrt{4A_1/\pi} = \sqrt{4\cdot 75/\pi} = 9{,}8\ \text{mm}, \\ N_x^2(50-200) = 2\,500\ \text{N} \Rightarrow \sigma_x^2 = \left|N_x^2\right| / A_2 < \sigma_{v,dop} \Rightarrow A_2 > \left|N_x^2\right| / \sigma_{v,dop} = 2\,500/50 = 50\ \text{mm}^2, \\ A_2 = \pi d_2^2/4 \Rightarrow d_2 = \sqrt{4A_2/\pi} = \sqrt{4\cdot 50/\pi} = 8\ \text{mm}. \end{gathered} \tag{58}$$

Kada uzmemo jednaka svojstva pri rastezanju i sabijanju dobijemo:

$$\begin{gathered} N_x^1(0-50) = -7\,500\ \text{N} \Rightarrow \sigma_x^1 = \left|N_x^1\right| / A_1 < \sigma_{dop} \Rightarrow A_1 > \left|N_x^1\right| / \sigma_{dop} = 7\,500/50 = 150\ \text{mm}^2, \\ A_1 = \pi d_1^2/4 \Rightarrow d_1 = \sqrt{4A_1/\pi} = \sqrt{4\cdot 150/\pi} = 13{,}8\ \text{mm}, \\ N_x^2(50-200) = 2\,500\ \text{N} \Rightarrow \sigma_x^2 = \left|N_x^2\right| / A_2 < \sigma_{dop} \Rightarrow A_2 > \left|N_x^2\right| / \sigma_{v,dop} = 2\,500/50 = 50\ \text{mm}^2, \\ A_2 = \pi d_2^2/4 \Rightarrow d_2 = \sqrt{4A_2/\pi} = \sqrt{4\cdot 50/\pi} = 8\ \text{mm}. \end{gathered} \tag{59}$$

Za presjek cijelog štapa mjerodavne su veće vrijednosti promjera. Početna pretpostavka na kojoj se temelji raspodjela opterećenja (uzdužne sile) je jednolikost promjera (presjeka) po duljini. Presjeci su prikazani na slici 5.5. i nisu u mjerilu s duljinskim mjerama.



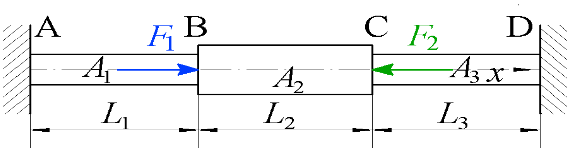
Slika 5.5. Poprečni presjeci za različite kriterije (materijalna svojstva)

5.3. Dimenzioniranje štapa stupnjevanog presjeka

Stupnjevani štap je štap koji se sastoji od nekoliko dijelova koji imaju istu os (središnjicu, težišnicu) a različite presjeke. Razlika u proračunu takvoga štapa u slučaju statičke neodređenosti je brojnost područja po kojima računamo promjene duljine u odnosu na štap nepromjenjivog presjeka. Dimenzioniranje statički neodređenih štapova može slijediti nakon određivanja raspodjele uzdužne sile, koja je prvi korak. Zasad moramo zanemariti nagle promjene poprečnog presjeka jer se tu javlja nejednolika raspodjela naprezanja, što je predmet analize u kolegiju Čvrstoća II. U idućem ćemo primjeru dimenzionirati stupnjevani štap. Budući da raspodjela uzdužne sile po štapu ovisi o poprečnom presjeku, jer promjena duljine nekog dijela štapa je obrnuto proporcionalna s ploštinom presjeka *A*, morat ćemo postaviti neka ograničenja na poprečni presjek kako bismo u jednom koraku izračunali raspodjelu uzdužne sile.

Primjer 5.1. Dimenzioniranje stupnjevanog štapa

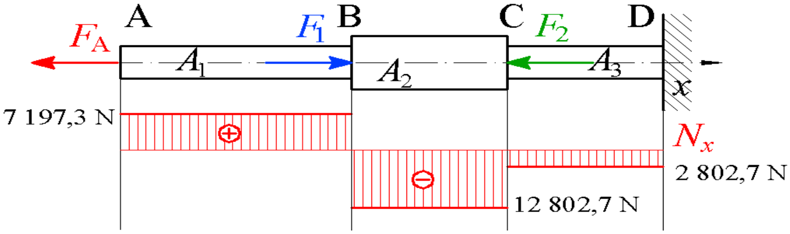
Treba dimenzionirati štap okruglog presjeka prema slici 5.6. Zadano je:
F_1 = 20 000 N, F_2 = 10 000 N, $A_1 = 0{,}65\,A_2$, $A_3 = 0{,}3\,A_2$, L_1 = 1000 mm, L_2 = 500 mm, L_3 = 500 mm, E = 200 000 N/mm², σ_{dop} = 150 MPa.



Slika 5.6. Stupnjevani statički neodređeni štap

Za izračun raspodjele uzdužne sile po štapu prvo ćemo primjenom principa superpozicije postaviti uvjet deformiranja. Prvi je korak oslobađanje jednog od uklještenja i pretpostavljanje reakcije u tom uklještenju. To je prikazano na slici 5.7. Za početak nam treba raspodjela uzdužne sile po štapu. Oslobađanjem točke A uvest ćemo uvjet deformiranja točke A i izračunati reakcijsku silu prema:

$$u_{\mathrm{A}} = 0, u_{\mathrm{A}} = u_{\mathrm{A}}(F_{\mathrm{A}}) + u_{\mathrm{A}}(F_1) + u_{\mathrm{A}}(F_2),$$
$$-\left(\frac{F_{\mathrm{A}} L_1}{A_1 E} + \frac{F_{\mathrm{A}} L_2}{A_2 E} + \frac{F_{\mathrm{A}} L_3}{A_3 E}\right) + \left(\frac{F_1 L_2}{A_2 E} + \frac{F_1 L_3}{A_3 E}\right) - \left(\frac{F_2 L_3}{A_3 E}\right) = 0, \qquad (60)$$
$$F_{\mathrm{A}} = 7197,29 \text{ N}.$$



Slika 5.7. Raspodjela uzdužne sile

Svaki dio štapa dimenzionirat ćemo postavljanjem uvjeta čvrstoće

$\sigma_x^i = N_x^i / A_i \leq \sigma_{\mathrm{dop}}$ te ćemo dobiti:

$$7\,197,3 / A_1 = 150 \Rightarrow A_1 = 47,982 \text{ mm}^2 \Rightarrow d_1 = 7,82 \text{ mm},$$
$$12\,802,7 / A_2 = 150 \Rightarrow A_2 = 85,351 \text{ mm}^2 \Rightarrow d_2 = 10,42 \text{ mm}, \qquad (61)$$
$$2\,802,7 / A_3 = 150 \Rightarrow A_3 = 18,685 \text{ mm}^2 \Rightarrow d_3 = 4,88 \text{ mm}.$$

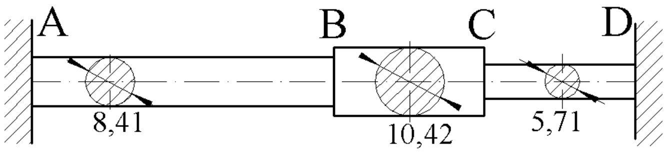
Kako smo na početku „morali" postaviti odnos ploština presjeka pojedinih dijelova radi olakšavanja izračuna reakcije u uklještenju, sada pri dimenzioniranju moramo povezati te presjeke. Provjerit ćemo s izračunatim A_1 jesu li A_2 i A_3 dovoljne prema izračunatim vrijednostima u (61), tj. doznat ćemo minimalne presjeke koji svugdje zadovoljavaju uvjet čvrstoće prema:

$$A_1 = 0{,}65A_2,\ A_3 = 0{,}3A_2,$$
$$A_1 = 47{,}982\ \text{mm}^2 \Rightarrow (A_2)_1 = 73{,}82\ \text{mm}^2\ [\text{NE ZADOVOLJAVA}],$$
$$A_2 = 85{,}351\ \text{mm}^2 \Rightarrow \begin{Bmatrix} (A_1)_2 = 55{,}478\ \text{mm}^2\ [\text{ZADOVOLJAVA}] \Rightarrow d_1 = 8{,}41\ \text{mm} \\ (A_3)_2 = 25{,}605\ \text{mm}^2\ [\text{ZADOVOLJAVA}] \Rightarrow d_3 = 5{,}71\ \text{mm} \end{Bmatrix}. \quad (62)$$

Prema provjeri čvrstoće u jednadžbama (62) vidljivo je da naprezanje u dijelu presjeka A_2 „diktira" koliki mogu biti presjeci 1 i 3. Oni moraju pod ograničenjima (A_1 = 0,65 A_2, A_3 = 0,3 A_2) biti predimenzionirani. Na slici 5.8. prikazani su presjeci (promjeri) dobiveni prema zadanim ograničenjima.

Zadatak za vježbu:

U ovom zadatku pokušajte postaviti jednadžbe za izračun manje predimenzioniranog štapa. Drugim riječima, pokušajte postaviti algoritam po koracima izračuna sve veće optimiranosti štapa. To znači, krenite dalje bez ograničenja za odnose među presjecima.



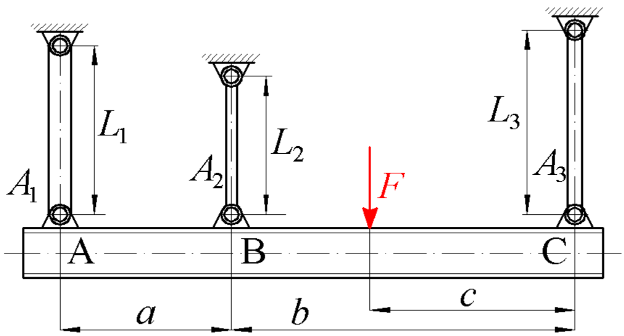
Slika 5.8. Poprečni presjeci (promjeri)

6. ŠTAPNE KONSTRUKCIJE

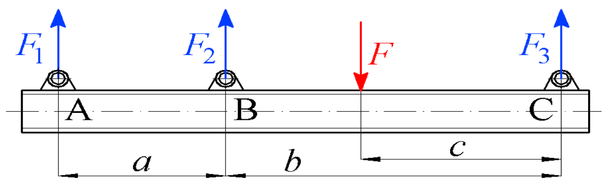
Konstrukcije su često sastavljene od više spojenih štapova, kao primjerice na slici 6.1., gdje su tri štapa spojena na krutu ravnu gredu. Ovdje je greda kruta, tj. zanemarujemo pomake u odnosu na njenu početnu ravnu težišnicu uslijed opterećenja silama štapova. Poprečni pomaci grede su za red ili dva veličine manji od promjena duljina pojedinih štapova pa ih ne uzimamo u obzir prilikom rješavanja sustava jednadžbi.

6.1. Konstrukcije opterećene silama

Prvi primjer štapne konstrukcije prikazan je na slici 6.1. Sila F opterećuje krutu gredu ABC na koju su spojeni štapovi 1, 2 i 3. Prvo ćemo pretpostaviti što se događa sa štapovima, i u skladu s tim ucrtati sile u štapovima koje djeluju na gredu. Zbog djelovanja sile između krajeva grede pretpostavimo da će svi štapovi biti rastegnuti, što će uzrokovati različito istezanje pojedinih štapova te pomicanje pojedinih točaka grede prema dolje. Sile koje djeluju na gredu prikazane su na slici 6.2. Ravnotežni položaj grede, a time posredno i štapova, prikazan je na slici 6.3. Pomaci su prikazani neproporcionalno veliki u odnosu na duljine štapova. Na slici 6.2. prikazane su sile u štapovima koje „povlače" gredu, što znači da će štapovi biti produljeni, kao što je prikazano na slici 6.3. Omjere produljenja štapova pretpostavljamo, kao što u kolegiju Mehanika 1 (statici nosača) pretpostavljamo reakcije u osloncima nosača. Na gredu djeluju tri štapa, a na raspolaganju su nam dvije jednadžbe ravnoteže koje su linearno nezavisne (što znači da ne opisuju jedno te isto na različit način), a to su jednadžba ravnoteže sila na pravcu paralelnom simetralama štapova, nazovimo je os z, te ravnoteže momenata sila oko osi okomite na os papira, nazovimo je os y. To znači da nam je jedna sila u štapu prekobrojna, tj. konstrukcija je jednom statički neodređena. Zbog toga se mora uvesti dodatna jednadžba, a to je uvjet deformiranja, što je prikazano na slici 6.3. Opisat ćemo krutost grede pomoću pomaka. Koliko god se produljili štapovi 1, 2 i 3, greda će ostati ravna. Kut nagiba grede prema početnom položaju je moguć unutar jednog stupnja, no prikazujemo ga desetak puta većeg radi preglednosti i isticanja promjena.



Slika 6.1. Stapna konstukcija s tri štapa i krutom gredom opterećena silom



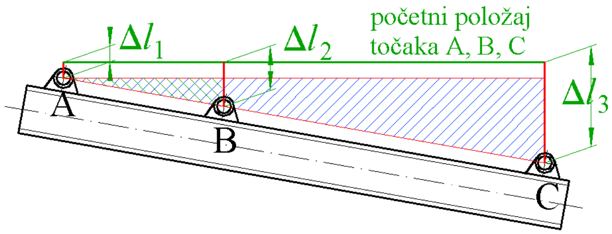
Slika 6.2. Sile na gredi

Jednadžbe ravnoteže zapisat ćemo kao:

$$\begin{gathered}\Sigma F_z = 0 \Rightarrow F_1 + F_2 + F_3 = F, \\ \Sigma M_y^{C} = 0 \Rightarrow F_1\left(a+b\right) + F_2 b = Fc.\end{gathered} \tag{63}$$

Uvjet deformiranja opisat ćemo pomoću sličnosti trokuta, prema slici 6.3. Budući da svi štapovi imaju ucrtanu promjenu duljine, trokut ćemo „postići" oduzimanjem veličine promjene duljine štapa 1, Δl_1 od ostalih promjena duljina štapova. Jedan trokut s hipotenuzom AB šrafiran je dvostruko, a drugi trokut, sličan prvom, s hipotenuzom AC šrafiran je jednostruko. Ta su dva trokuta slična po kutu između vodoravnih kateta i hipotenuza. Napisat ćemo tangens tog kuta za manji trokut AB i veći AC prema:

$$\tan\alpha = \frac{\Delta l_2 - \Delta l_1}{a} = \frac{\Delta l_3 - \Delta l_1}{a+b}. \tag{64}$$



Slika 6.3. Pomaci grede – promjene duljine štapova

Promjene duljine pojedinog štapa sada možemo povezati s pripadnom silom u štapu, prema jednadžbi $\Delta l = FL / AE$, pa za pojedine štapove imamo:

$$\Delta l_1 = F_1 L_1 / \left(A_1 E\right),\ \Delta l_2 = F_2 L_2 / \left(A_2 E\right),\ \Delta l_3 = F_3 L_3 / \left(A_3 E\right). \tag{65}$$

Uzmimo za primjer sljedeće podatke za konstrukciju: F = 10 000 N, a = 1 m, b = 2 m, c = 1 m, A_1 = 100 mm², A_2 = 150 mm², A_3 = 100 mm², E = 200 000 MPa, L_1 = 1000 mm, L_2 = 750 mm, L_3 = 1000 mm.
Uvrštavanjem tih podataka u jednadžbe (65) dobivamo:

$$\begin{aligned}\Delta l_1 &= F_1 \cdot 1\,000 / \left(100 \cdot 200\,000\right) = 5 \cdot 10^{-5} F_1,\\ \Delta l_2 &= F_2 \cdot 750 / \left(150 \cdot 200\,000\right) = 2{,}5 \cdot 10^{-4} F_2,\\ \Delta l_3 &= F_3 \cdot 1\,000 / \left(100 \cdot 200\,000\right) = 5 \cdot 10^{-5} F_3.\end{aligned} \tag{66}$$

Uvrštavanjem (66) u (64) dobivamo:

$$\begin{gathered}\frac{2{,}5 \cdot 10^{-4} F_2 - 5 \cdot 10^{-5} F_1}{1} = \frac{5 \cdot 10^{-5} F_3 - 5 \cdot 10^{-5} F_1}{3} \Rightarrow\\ \left(2{,}5 \cdot 10^{-4} F_2 - 5 \cdot 10^{-5} F_1\right) 3 = 5 \cdot 10^{-5} F_3 - 5 \cdot 10^{-5} F_1 \Rightarrow\\ 7{,}5 \cdot 10^{-4} F_2 - 10^{-4} F_1 - 5 \cdot 10^{-5} F_3 = 0.\end{gathered} \tag{67}$$

Sada kombiniranjem jednadžbi ravnoteže i prethodno izračunatog uvjeta deformiranja dobivamo:

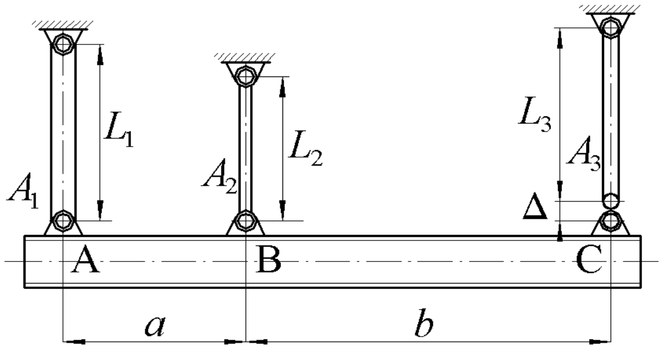
$$\begin{gathered}3F_1 + 2F_2 = 10\,000 \cdot 1 \Rightarrow F_1 = 10\,000 / 3 - 2F_2 / 3,\\ F_1 + F_2 + F_3 = 10\,000 \Rightarrow 10\,000 / 3 - 2F_2 / 3 + F_2 + F_3 = 10\,000,\\ F_2 / 3 + F_3 = 20\,000 / 3 \Rightarrow F_3 = 20\,000 / 3 - F_2 / 3,\\ 7{,}5 \cdot 10^{-4} \left(F_2\right) - 10^{-4} \left(10\,000 / 3 - 2F_2 / 3\right) - 5 \cdot 10^{-5} \left(20\,000 / 3 - F_2 / 3\right) = 0,\\ 7{,}5F_2 - \left(10\,000 / 3 - 2F_2 / 3\right) - 0{,}5\left(20\,000 / 3 - F_2 / 3\right) = 0,\\ F_2 = 816{,}33\text{ N},\ F_1 = 2\,789{,}12\text{ N},\ F_3 = 6\,394{,}56\text{ N}.\end{gathered} \tag{68}$$

Naprezanja po štapovima izračunavamo prema:

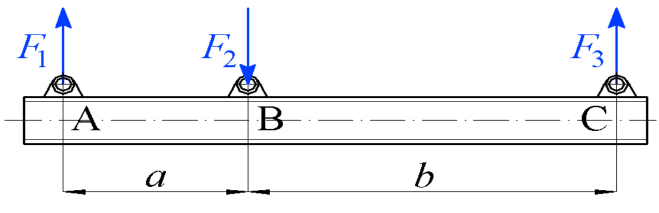
$$\begin{gathered}\sigma_1 = F_1 / A_1 = 2\,789{,}12 / 100 = 27{,}9\text{ MPa},\ \sigma_2 = F_2 / A_2 = 816{,}33 / 150 = 5{,}44\text{ MPa},\\ \sigma_3 = F_3 / A_3 = 6\,394{,}56 / 100 = 63{,}95\text{ MPa}.\end{gathered} \tag{69}$$

6.2. Konstrukcije opterećene spajanjem dijelova s greškom – montažna (sklopna) naprezanja

U svakoj proizvodnji postoje greške pa tako i u proizvodnji štapova razmak osi provrta na krajevima nije uvijek proizveden na točnu, projektiranu mjeru, nego postoje greške te mjere. Ako spajamo tri ili više štapova na krutu gredu, kao na slici 6.4., onda će svaka greška mjere razmaka osi uzrokovati potrebu za silom prilikom spajanja tog štapa na konstrukciju, a nakon spajanja će trajno uzrokovati sile u svim štapovima uslijed greške mjere. Takvu vrstu sila, a time i naprezanja u štapovima koji su posljedica krivog spajanja ili greške mjera pojedinih dijelova, zovemo montažna naprezanja. Aktivno opterećenje još nije primijenjeno, a postoje naprezanja, što ne želimo. U ovom ćemo primjeru odrediti naprezanja u štapovima uslijed greške mjere jednog od štapova. Analizirat ćemo stanje nakon spajanja, kada je konstrukcija prepuštena „sama sebi", kakvo god spajanje bilo. U samom spajanju, sile na pojedinim štapovima mogu biti i veće od vrijednosti nakon spajanja.



Slika 6.4. Štapna konstrukcija s greškom mjere

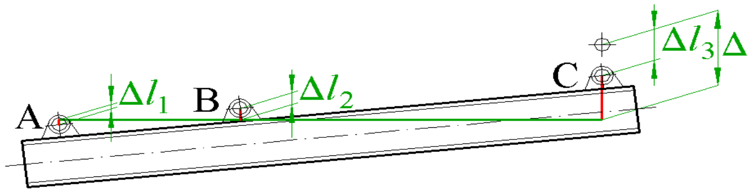


Slika 6.5. Sile na gredi nakon spajanja

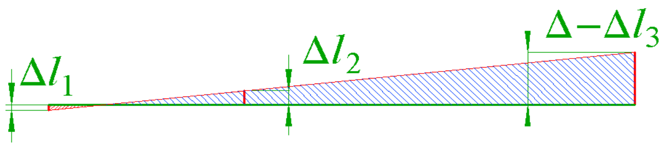
Jednadžbe ravnoteže zapisat ćemo kao:

$$\begin{gathered}\Sigma F_z = 0 \Rightarrow F_1 - F_2 + F_3 = 0, \\ \Sigma M_y^{\mathrm{B}} = 0 \Rightarrow F_1 a = F_3 b.\end{gathered} \tag{70}$$

Kada su štapovi spojeni na gredu, kraći štap, prema ovoj slici to je štap 3, koji je proizveden tako da je kraći od potrebnog (zadane mjere razmaka provrta), je rastegnut jer se morao prilagoditi, provrt je pomaknut na donjem kraju prema gredi, a to znači da je rastegnut, te u njemu postoji sila, tj. naprezanje. Štap 3 djeluje na gredu privlačeći je sebi, tj. pokušava se vratiti u svoje prvobitno ravnotežno stanje u kojem nije rastegnut. Tim privlačanjem grede uzrokuje deformiranje ostalih štapova. Za očekivati je da će privlačenje štapa 3 uzrokovati pritiskanje štapa 2 na gredu, te rastezanje štapa 1 jer štap 2 djeluje donekle kao zglobni oslonac klackalice. Sile u štapovima u skladu s objašnjenjem o deformiranju u prethodnim rečenicama prikazane su na slici 6.5. Promjene duljine pojedinog štapa u skladu s pretpostavljenim silama prikazane su na slici 6.6. Na temelju pomaka opisujemo uvjet deformiranja u obliku sličnosti trokuta, prema slici 6.7. Na slici 6.6. tankom je crtom prikazana kružnica iznad točke C koja predstavlja početni položaj donjeg kraja štapa 3, prije spajanja.



Slika 6.6. Promjene duljina štapova



Slika 6.7. Dijagram promjena duljina štapova

$$\frac{\Delta l_2 + \Delta l_1}{a} = \frac{\Delta - \Delta l_3 + \Delta l_1}{a+b}. \tag{71}$$

Promjene duljine pojedinog štapa sada možemo povezati s pripadnom silom u štapu prema jednadžbi $\Delta l = FL / AE$ pa za pojedine štapove imamo:

$$\Delta l_1 = F_1 L_1 / \left(A_1 E\right),\ \Delta l_2 = F_2 L_2 / \left(A_2 E\right),\ \Delta l_3 = F_3 L_3 / \left(A_3 E\right). \tag{72}$$

Uzmimo za primjer sljedeće podatke za konstrukciju: $\Delta = 0{,}5$ mm, $a = 1$ m, $b = 2$ m, $A_1 = 100$ mm^2, $A_2 = 150$ mm^2, $A_3 = 100$ mm^2, $E = 200\,000$ MPa, $L_1 = 1000$ mm, $L_2 = 750$ mm, $L_3 = 1000$ mm. Uvrštavanjem tih podataka u jednadžbe (72) dobivamo:

$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= F_1 \cdot 1\,000 / \left(100 \cdot 200\,000\right) = 5 \cdot 10^{-5} F_1, \\ \Delta l_2 &= F_2 \cdot 750 / \left(150 \cdot 200\,000\right) = 2{,}5 \cdot 10^{-4} F_2, \\ \Delta l_3 &= F_3 \cdot 1\,000 / \left(100 \cdot 200\,000\right) = 5 \cdot 10^{-5} F_3. \end{aligned} \tag{73}$$

Nadalje uvrštavamo vrijednosti iz (73) u uvjet deformiranja (71) pa dobivamo:

$$\begin{gathered} \frac{2{,}5 \cdot 10^{-4} F_2 + 5 \cdot 10^{-5} F_1}{1} = \frac{0{,}5 - 5 \cdot 10^{-5} F_3 + 5 \cdot 10^{-5} F_1}{3}, \\ 3\left(2{,}5 \cdot 10^{-4} F_2 + 5 \cdot 10^{-5} F_1\right) = 0{,}5 - 5 \cdot 10^{-5} F_3 + 5 \cdot 10^{-5} F_1, \\ 10^{-4} F_1 + 7{,}5 \cdot 10^{-4} F_2 + 5 \cdot 10^{-5} F_3 = 0{,}5. \end{gathered} \tag{74}$$

Iz jednadžbi ravnoteže možemo dobiti:

$$3F_3 = F_2, \;\; F_1 = 2F_3. \tag{75}$$

Nadalje možemo riješiti sustav jednadžbi pa dobivamo:

$$\begin{gathered} 2 \cdot 10^{-4} F_3 + 2{,}25 \cdot 10^{-3} F_3 + 5 \cdot 10^{-5} F_3 = 0{,}5, \\ 2{,}5 \cdot 10^{-3} F_3 = 0{,}5, \\ F_3 = 200 \text{ N}, F_2 = 600 \text{ N}, F_1 = 400 \text{ N}. \end{gathered} \tag{76}$$

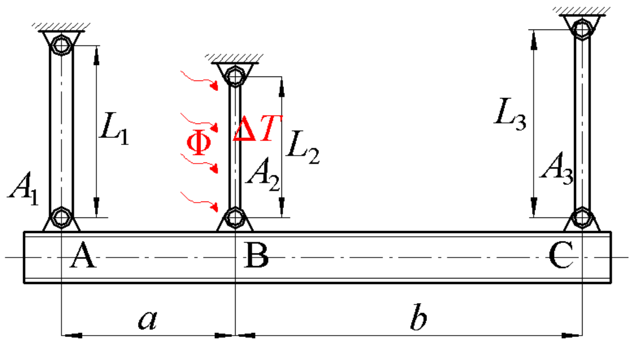
Zaključimo proračun naprezanjima koja uzrokuje grešku na jednom štapu u iznosu od 0,5/1 000 = $5 \cdot 10^{-4}$ (0,5 promila) relativne duljine štapa:

$$\begin{gathered} \sigma_1 = F_1 / A_1 = 400 / 100 = 4 \text{ MPa}, \sigma_2 = F_2 / A_2 = -600 / 150 = -4 \text{ MPa}, \\ \sigma_3 = F_3 / A_3 = 300 / 100 = 3 \text{ MPa}. \end{gathered} \tag{77}$$

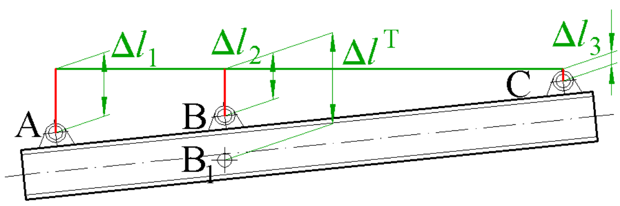
Naprezanje u štapu 2 je tlačno (sabijanje) jer je izračun sile potvrdio predznak pretpostavljene sile, a ona djeluje tlačno na štap (princip akcije i reakcije: štap pritišće gredu, greda pritišće štap).

6.3. Konstrukcije opterećene toplinom – povišenjem temperature

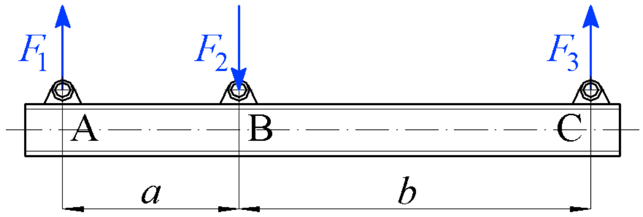
U konstrukcijama često postoje utjecaji izvora topline, a otvorene konstrukcije izložene su sunčevom zračenju te su svakodnevno opterećene ugrijavanjem i hlađenjem. Proračunat ćemo pojave pri ugrijavanju jednog od štapova u konstrukciji na slici 6.8. Štap 2 izložen je sunčevom zračenju intenziteta Φ i povisuje mu se temperatura za ΔT. Zbog toga se štap 2 širi, tj. produljuje. On bi se produljio za ΔL^{T} kada ne bi bilo otpora tom produljivanju, no kako je štap 2 vezan za krutu gredu ABC, on pomiče i gredu svojim produljivanjem. Pomicanjem grede pomiču se i točke spoja sa štapovima 1 i 3. To uzrokuje rastezanje (ili sabijanje, ovisno o geometrijskim odnosima u konstrukciji) štapova 1 i 3. Time se štapovi 1 i 3 opiru tom pomicanju grede, tj. u nekoj mjeri „koče" štap 2 u slobodnom širenju. Ravnotežni položaj za neku promjenu temperature ΔT pomaka, a time i promjena duljina štapova, prikazan je na slici 6.9. Za to stanje, u skladu s pretpostavljenim promjenama duljina štapova, ucrtavamo sile koje djeluju na gredu, kao na slici 6.10.



Slika 6.8. Konstrukcija opterećena ugrijavanjem jednog štapa



Slika 6.9. Pomaci štapova



Slika 6.10. Sile na gredi nakon ugrijavanja

Uzmimo za primjer sljedeće podatke za konstrukciju: ΔT = 30 K, a = 1 m, b = 2 m, A_1 = 100 mm², A_2 = 150 mm², A_3 = 100 mm², E = 200 000 MPa, L_1 = 1000 mm, L_2 = 750 mm, L_3 = 1000 mm, α = 12·10⁻⁶ m/mK. Promjene duljina štapova povezujemo s promjenom temperature i silama prema:

$$\begin{aligned}
\Delta l_1 &= F_1 \cdot 1\,000 / \left(100 \cdot 200\,000\right) = 5 \cdot 10^{-5} F_1, \\
\Delta l_2^T &= \alpha L_2 \Delta T = 12 \cdot 10^{-6} \cdot 30 \cdot 750 = 0,27 \text{ mm}, \\
\Delta l_2^F &= -F_2 \cdot 750 / \left(150 \cdot 200\,000\right) = 2,5 \cdot 10^{-4} F_2, \\
\Delta l_3 &= F_3 \cdot 1\,000 / \left(100 \cdot 200\,000\right) = 5 \cdot 10^{-5} F_3.
\end{aligned} \tag{78}$$

Prema slici 6.9. postavljamo uvjet deformiranja:

$$\frac{\Delta l_1 - \Delta l_3}{a+b} = \frac{\left(\Delta l^T + \Delta l_2^F\right) - \Delta l_3}{b}. \tag{79}$$

Jednadžbe ravnoteže su:

$$\begin{aligned}
\Sigma F_z &= 0 \Rightarrow F_1 - F_2 + F_3 = 0, \\
\Sigma M_y^{\mathrm{B}} &= 0 \Rightarrow F_1 a = F_3 b.
\end{aligned} \tag{80}$$

Nadalje uvrštavamo vrijednosti iz (78) u uvjet deformiranja (79) pa dobivamo:

$$\begin{gathered}
\frac{5 \cdot 10^{-5} F_1 - 5 \cdot 10^{-5} F_3}{3} = \frac{0,27 - 2,5 \cdot 10^{-4} F_2 - 5 \cdot 10^{-5} F_3}{2}, \\
2\left(5 \cdot 10^{-5} F_1 - 5 \cdot 10^{-5} F_3\right) = 3\left(0,27 - 2,5 \cdot 10^{-4} F_2 - 5 \cdot 10^{-5} F_3\right), \\
10^{-4} F_1 + 7,5 \cdot 10^{-4} F_2 + 5 \cdot 10^{-5} F_3 = 0,81.
\end{gathered} \tag{81}$$

Iz jednadžbi ravnoteže možemo dobiti:

$$3F_3 = F_2,\, F_1 = 2F_3. \tag{82}$$

Nadalje možemo riješiti sustav jednadžbi pa dobivamo:

$$\begin{gathered}10^{-4}\left(3F_3\right)+7{,}5\cdot10^{-4}\left(3F_3\right)+5\cdot10^{-5}F_3=0{,}81,\\ 2{,}6\cdot10^{-3}F_3=0{,}81,\\ F_3=311{,}54\ \text{N},\ F_2=934{,}62\ \text{N},\ F_1=623{,}08\ \text{N}.\end{gathered} \tag{83}$$

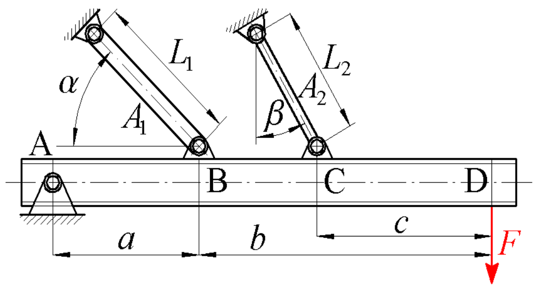
Na temelju izračunatih sila možemo zaključiti proračun izračunom naprezanja u štapovima:

$$\begin{gathered}\sigma_1=F_1\,/\,A_1=623{,}08\,/\,100=6{,}23\ \text{MPa},\\ \sigma_2=F_2\,/\,A_2=-934{,}62\,/\,150=-6{,}23\ \text{MPa},\\ \sigma_3=F_3\,/\,A_3=311{,}54\,/\,100=3{,}12\ \text{MPa}.\end{gathered} \tag{84}$$

Naprezanje u štapu 2 je tlačno (sabijanje) jer je izračun sile potvrdio predznak pretpostavljene sile, a ona djeluje tlačno na štap (princip akcije i reakcije: štap pritišće gredu, greda pritišće štap).

6.4. Štapovi postavljeni na gredu pod kutom različitim od 90°

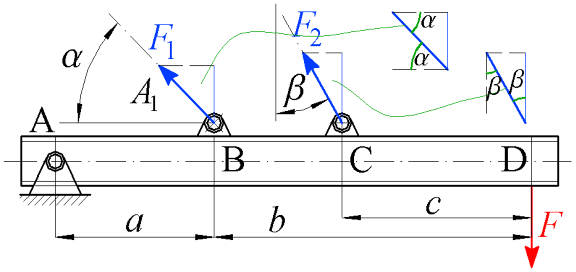
Vrlo često nadstrešnice imaju štapove ili čeličnu užad kao elemente koji uz neki zglobni oslonac na zidu pridržavaju težinu nadstrešnice. Obično su i ti elementi spojeni jednim svojim krajem na zid pa su štapovi spojeni na nadstrešnicu pod nekim kutom koji je različit od 90°. Jedna takva pojednostavljena štapna konstrukcija prikazana je na slici 6.11. Dva su štapa spojena na krutu gredu pod različito kotiranim kutom te je jedna zglobna veza grede i nepomične okoline. Proračun opterećenja i naprezanja u takvim štapovima provodimo u prvom redu uz djelomično oslobađanje veza grede s okolinom, tj. u prvom koraku ostavljamo zglobnu vezu sa zidom. Zanimaju nas samo sile u štapovima. Za to koristimo jednadžbu ravnoteže momenata sila oko osi koja prolazi kroz simetralu zglobnog oslonca A i okomita je na ravninu crtanja. Zadano je: a = 500 mm, b = 1500 mm, c = 500 mm, F = 10 000 N, α = 45°, β = 30°, A_1 = 150 mm², L_1 = 1500 mm, E_1 = 200 000 N/mm², A_2 = 200 mm², L_2 = 2 500 mm, E_2 = 200 000 N/mm².



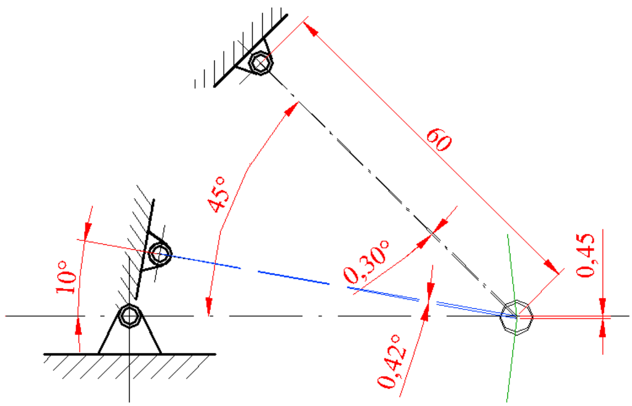
Slika 6.11. Kruta greda spojena zglobnim osloncem i s dva štapa na okolinu

U oba štapa očekujemo sile rastezanja, tj. štapovi povlače gredu prema gore s obzirom na to da aktivno opterećenje djeluje prema dolje. Na temelju slike 6.12. možemo postaviti jednadžbu ravnoteže momenata sila oko osi kroz oslonac A prema:

$$\Sigma M_y^A = 0 \Rightarrow F_1 \sin(\alpha) a + F_2 \cos(\beta)(a+b-c) = F(a+b). \qquad (85)$$



Slika 6.12. Greda djelomično oslobođena veza s okolinom

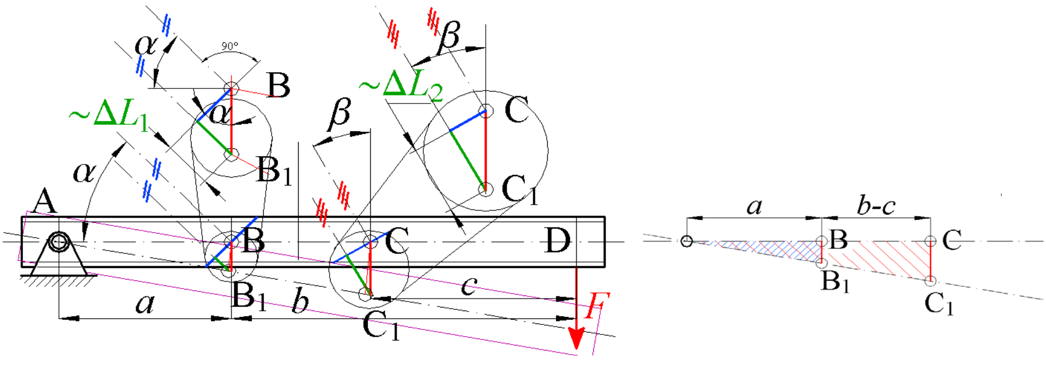


Slika 6.13. Linearizacija (pojednostavljenje) promjene duljine štapa

Na slici 6.12. prikazani su pravokutni trokuti koji predstavljaju projekciju sile u štapu na vertikalu. Za kut sile prema vertikali uzimamo kut između simetrale štapa prije deformiranja i vertikale. Tijekom deformiranja od početnog, neopterećenog stanja, greda se zakreće pod djelovanjem sile F i produljenja štapova, pa se uvjeti za štapove malo promijene. Tu promjenu prikazuje slika 6.13. Ovisno o početnoj geometriji, te promjene mogu biti zanemarive ili mogu utjecati na točnost proračuna. Za neku zamišljenu promjenu geometrije promjena kuta je 0,3° (prema slici 6.13.), što je na početnih 45° dovoljno malo da je smijemo zanemariti. Za mnogo manji početni kut simetrale štapa i grede, nacrtano plavom simetralom, ista promjena položaja hvatišta po vertikali je značajnija, tj. uzrokuje veću promjenu kuta. Usporedba s početnim kutom od 10° daje uvid u utjecaj zanemarenja promjene kuta. Utjecaj promjene možemo pokušati dočarati (istaknuti) izračunom sinusa kuta bez i s promjenom prema:

$$\left[\begin{array}{l} a:\sin\left(45^\circ\right)=0{,}707\,2. \\ b:\sin\left(45^\circ+0{,}3^\circ\right)=0{,}710\,8. \end{array}\right] \rightarrow \frac{0{,}710\,8-0{,}707\,2}{0{,}710\,8} \approx 0{,}005\,2\left(0{,}52\%\right),$$
$$\left[\begin{array}{l} a:\sin\left(10^\circ\right)=0{,}173\,648. \\ b:\sin\left(10^\circ+0{,}42^\circ\right)=0{,}180\,862. \end{array}\right] \rightarrow \frac{0{,}180\,862-0{,}173\,648}{0{,}173\,648} \approx 0{,}0415\left(4{,}15\%\right). \tag{86}$$

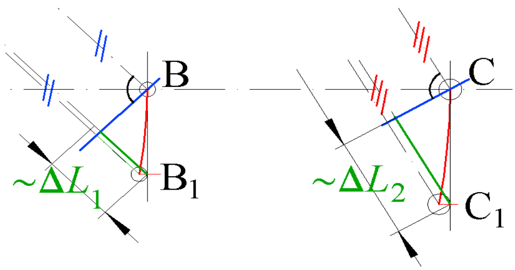
Ovo zanemarivanje promjene (utjecaja) geometrije zovemo linearizacija oko ravnotežnog položaja. Na raspolaganju nam je jedna nezavisna jednadžba ravnoteže (85) s dvije nepoznate sile u štapovima. Za rješavanje sustava jednadžbi treba nam još jedna jednadžba, uvjet deformiranja, koja povezuje dvije sile u štapovima. Ta jednadžba povezuje geometriju prilikom deformiranja, tj. koristimo pojednostavljeno gledanje da je greda tijekom deformiranja kruta. Na slici 6.14.a) prikazana je greda u početnom i zarotiranom položaju, a na slici 6.14.b) izdvojena je sličnost trokuta na temelju koje povezujemo promjene duljina štapova. Ponovno koristimo pojednostavljenje u deformiranju štapova, što je vidljivo u detalju slike 6.14.a). Greda u opterećenom stanju prikazana je ljubičastom konturom, karikirano (pretjerano) zarotirana iz početnog neopterećenog položaja. Kut između ta dva položaja je redovito ispod 1°. Ovdje je taj kut pretjerano velik, tako da se dovoljno dobro može uočiti pojednostavljenje. Promjena položaja točaka B i C je po putanji oblika kružnog luka jer za krutu gredu radijusi točaka B i C ostaju ravni i jednake duljine, stoga one putuju po kružnim putanjama pa se tako položaji tih točaka mijenjaju po vertikali i horizontali. Promjenu po horizontali, tj. uzduž početnog položaja simetrale grede, teško je uzeti u obzir jer uključuje kosinus funkciju, zbog čega gubimo linearnost, tj. jednostavnost. Zbog toga se ograničavamo na male promjene kuta i grede, i simetrala štapova, time i njihovih kutova, kako je prikazano barem okvirno u jednadžbama (86). Detaljniji prikaz prave i približne putanje točaka B i C predočen je na slici 6.15.



a) b)

Slika 6.14. Povezivanje promjena duljina štapova – uvjet deformiranja: a) šira slika i b) prikaz točaka na težišnici grede

Kada pojednostavnimo utjecaj promjene kuta simetrale štapova i zadržimo im početni položaj, tj. kut prema gredi, tada možemo pojednostavljeno izračunati promjenu duljine štapova u ovisnosti o promjeni položaja točaka B i C. Sa slike 6.14.a) koristimo pojednostavljeno gledanje na promjenu geometrije štapova i grede. Približno vertikalnim pomicanjem prema dolje, točka B prelazi u novi položaj B_1. Kako bismo „izmjerili" promjenu duljine štapa 1 trebamo nacrtati dio kružnog luka sa središtem u hvatištu štapa 1 s okolinom, kroz točku B, i gledati gdje taj kružni luk presjeca zarotirani položaj simetrale koji je određen novim položajem točke B, B_1. Greda nameće štapu kako će se mijenjati položaj i duljina. Povlačenjem paralele s početnim položajem simetrale štapa 1 kroz pomaknuti vrh B_1 pojednostavljeno crtamo i promjenu duljine. Presjecište kružnog luka kroz vrh B i pomaknutog položaja simetrale štapa nam daje približnu promjenu duljine štapa 1. Kada zanemarimo kružni luk i predočimo ga kao dužinu, dobijemo pravokutni trokut s hipotenuzom BB_1. Uvećana promjena položaja točaka B i C prikazana je na slici 6. 15.



Slika 6.15. Uvećana promjena položaja točaka B i C

Kotirani kut α ucrtan je u taj trokut. Sada možemo povezati vertikalni pomak (zapravo posredno kut zakreta grede) točke B i promjenu duljine štapa 1 prema:

$$\Delta l_1 \approx \overline{\mathrm{B}}\overline{\mathrm{B}}_1 \sin(\alpha) = a\varphi \sin(\alpha). \tag{87}$$

Kut zakreta grede označimo zasad kao φ. Slično možemo povezati zakret grede i promjenu duljine štapa 2:

$$\Delta l_2 \approx \overline{\mathrm{C}}\overline{\mathrm{C}}_1 \cos(\beta) = (a+b-c)\varphi \cos(\beta). \tag{88}$$

Iz te dvije jednadžbe možemo povezati promjenu duljina štapova:

$$\begin{gathered} \Delta l_1 = a\varphi \sin(\alpha) \to \varphi = \Delta l_1 / \left[a \sin(\alpha)\right], \\ \Delta l_2 = (a+b-c)\varphi \cos(\beta) \to \varphi = \Delta l_2 / \left[(a+b-c)\cos(\beta)\right], \\ \Delta l_1 / \left[a\sin(\alpha)\right] = \Delta l_2 / \left[(a+b-c)\cos(\beta)\right], \\ \Delta l_1 = \Delta l_2 \frac{a\sin(\alpha)}{(a+b-c)\cos(\beta)}. \end{gathered} \tag{89}$$

Nadalje možemo povezati promjene duljina pojedinih štapova sa silama koje djeluju na štapove $\Delta l_1 = F_1 L_1 / \left(A_1 E_1 \right), \Delta l_2 = F_2 L_2 / \left(A_2 E_2 \right)$. Uvrštavanjem ovisnosti promjene duljine o sili u geometrijski odnos (89) dobit ćemo drugu jednadžbu sa silama kao nepoznanicama:

$$
\begin{aligned}
\frac{F_1 L_1}{A_1 E_1} &= \frac{F_2 L_2}{A_2 E_2} \frac{a \sin(\alpha)}{(a+b-c)\cos(\beta)}, \\
F_1 \frac{1\,500}{150E} &= F_2 \frac{2\,500}{200E} \frac{500 \sin(45°)}{1\,500 \cos(30°)}, \\
F_1 10 &= F_2 12{,}5 \cdot 0{,}272\,166 = F_2 3{,}402\,07, \\
F_1 &= 0{,}340\,207 F_2.
\end{aligned} \tag{90}
$$

Poveznicu među silama (90) možemo vratiti u jednadžbu ravnoteže (85) te riješiti sustav jednadžbi i izračunati sile u štapovima:

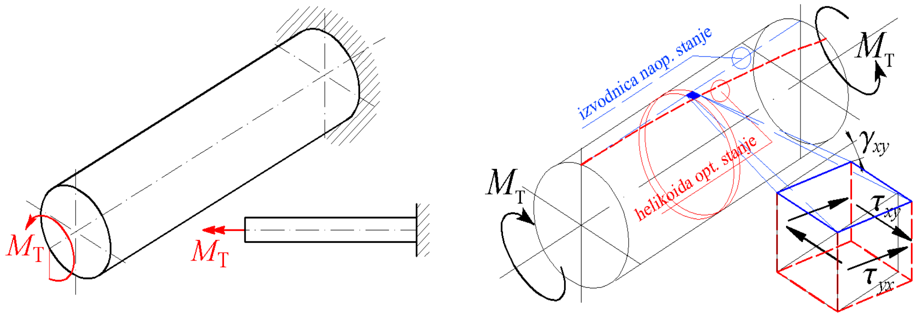
$$
\begin{aligned}
F_1 \sin(45°)500 + F_2 \cos(30°)(1\,500) &= 10000(2\,000), \\
F_1 &= 0{,}340\,207 F_2, \\
0{,}340\,207 F_2 \cdot 353{,}553\,39 + F_2 \cdot 1\,299{,}038 &= 2 \cdot 10^7, \\
1\,419{,}319\,444 F_2 = 2 \cdot 10^7 &\Rightarrow F_2 = 14\,091{,}260\,5 \text{ N}, \\
F_1 = 0{,}340\,207 \cdot 14\,091{,}260\,5 &= 4\,793{,}946 \text{ N}.
\end{aligned} \tag{91}
$$

Sada možemo izračunati koliko je naprezanje u svakom štapu:

$$
\begin{aligned}
1: \sigma_x &= F_1 / A_1 = 4\,793{,}946 / 150 = 31{,}96 \text{ MPa}, \\
2: \sigma_x &= F_2 / A_2 = 14\,091{,}261 / 200 = 70{,}46 \text{ MPa}.
\end{aligned} \tag{92}
$$

7. UVIJANJE ŠTAPOVA OKRUGLOG PRESJEKA

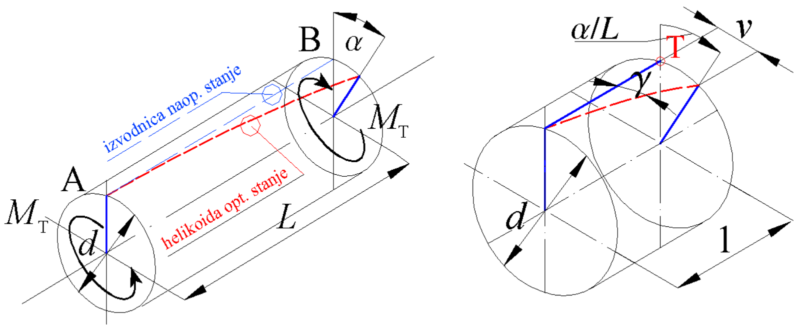
Uvijanje štapova predstavlja opterećenje momentom oko uzdužne osi (središnjice, simetrale). Ograničit ćemo se na štapove okruglog presjeka, punog ili u obliku cijevi, jer je tada raspodjela naprezanja osnosimetrična. To znači da je naprezanje na nekom radijusu jednako cijelim „opsegom" te zamišljene kružnice, neovisno o položaju kuta na kružnici. Uz uvjet da je štap načinjen od homogenog i izotropnog materijala, tada je i deformiranje, povezano s raspodjelom naprezanja Hookeovim zakonom, osnosimetrično. Kako je dokazano kroz povijest, poprečni presjeci se deformiraju kao „ploče", tj. svaki presjek ostaje u svojoj početnoj ravnini. Međusobno se presjeci zakreću za mali kut dφ, a udaljeni su za dx. Na slici 7.1.a) simbolično je prikazan štap opterećen na uvijanje, a na slici 7.1.b) prikazano je deformiranje poprečnih presjeka, tj. štapa.



a) *b*)

Slika 7.1. Štap opterećen na uvijanje: a) simbolični prikaz štapa u izometriji i nacrtu i b) deformiranje dvaju bliskih presjeka

Na slici 7.2.a) crnom je bojom prikazan neopterećen štap, duljine L, s jednom izvodnicom nacrtanom plavom isprekidanom crtom, a crvenom isprekidanom crtom prikazan je opterećen i deformiran oblik, uvijen, pri čemu je deformiran oblik određen kutom zakreta presjeka B za α u odnosu na presjek A. Promjena kuta presjeka B posredno je mjera kutne deformacije štapa, a izračunat ćemo je promatrajući elementarni pravokutnik na vanjskoj površini štapa i ono što se događa prilikom deformiranja. Jedna nam činjenica olakšava proračun deformacije, a to je da će se na štapu koji je stalnog promjera, na dijelu na kojem je stalno opterećenje (moment uvijanja M_T) i na kojem materijal ima svugdje ista svojstva, svaki presjek zakrenuti za isti iznos prema prethodnom presjeku.

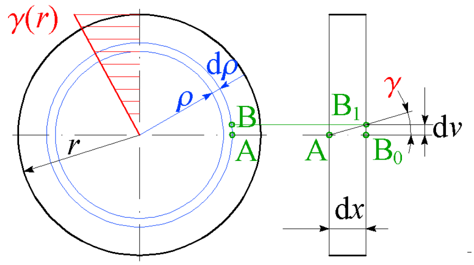


a) *b*)

Slika 7.2. Deformiranje štapa pri uvijanju: a) zakretanje krajeva štapa i b) zakretanje bliskih presjeka

7.1. Izračunavanje pomaka, deformacije i naprezanja

Budući da promatramo štap stalnog poprečnog presjeka, opterećen jednostavno, tako da je moment uvijanja stalan, a svojstva materijala stalna, očekujemo da su uvjeti i promjene svugdje isti. To nam govori da će promjena geometrije i deformacija biti svugdje ista, pa dolazimo do raspodjele naprezanja uzduž takvog štapa (ili dijela štapa na kojem su presjek, sila i materijal stalni), koja je stalna. Na nekom presjeku, uzduž štapa, očekujemo istu raspodjelu naprezanja. Izračun raspodjele naprezanja po presjeku temeljit ćemo na geometrijskoj analizi koja je oslikana na slici 7.3.



Slika 7.3. Deformiranje dvaju susjednih presjeka štapa

U presjeku je prikazan tanki prsten na radijusu ρ, širine dρ, na kojem ćemo izračunati kutnu deformaciju, i iz Hookeova zakona posmično naprezanje. Označit ćemo dvije točke, A i B, na zamišljenoj cilindričnoj površini, na udaljenosti dx po središnjici, jednoj izvodnici tog cilindra u neopterećenom stanju, kako je prikazano na slici 7.3. Nakon opterećivanja, štap će se deformirati, a presjeci zakretati, pa ćemo dobiti zakrenuti (zarotiran oko središnjice) presjek na desnoj strani bokocrta na slici 7.3. za mali kut dα, kako je prikazano i na slici 7.2.b), iz kojeg ćemo izračunati označeni pomak v koji je dio kružnog luka v = ρdα.

Nadalje, promjena kuta od pravog kuta, koji zamišljamo između dužine AB_0 i površine presjeka lijeve ili desne na slici 7.3., označenog sa γ, jednaka je $\gamma = \mathrm{d}v/\mathrm{d}x$, uz pojednostavljenje da je tangens malog kuta približno jednak tom kutu u radijanima. Slijedi da je kutna deformacija funkcija radijusa prema:

$$\gamma = \rho \mathrm{d}\alpha / \mathrm{d}x. \tag{93}$$

Funkciju $\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}x$ izračunat ćemo iz jednadžbe ravnoteže, odnosno naprezanja po presjeku koje uravnotežuje djelovanje momenta uvijanja „izvana", koje provodimo prema:

$$\tau = G\gamma = G\rho \mathrm{d}\alpha / \mathrm{d}x,$$

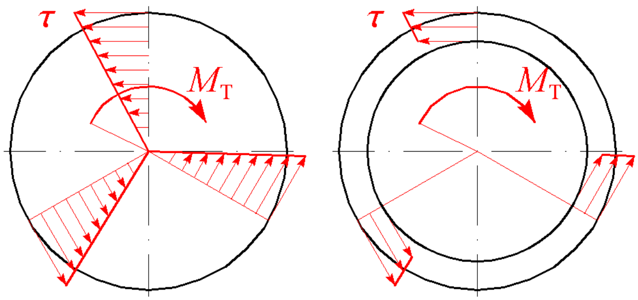
$$\begin{gathered} M_\mathrm{T} = \int_0^r \rho\tau(\rho) 2\pi\rho \mathrm{d}\rho = 2\pi \int_0^r \rho^3 G \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}\rho = 2\pi G \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x} \frac{\rho^4}{4}\bigg|_0^r = \\ G\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}\frac{r^4\pi}{2} = G\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}\frac{d^4\pi}{32}. \Rightarrow \left| I_\mathrm{p} = \frac{d^4\pi}{32} \right| \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x} = \frac{M_\mathrm{T}}{GI_\mathrm{p}} \Rightarrow \tau = \frac{M_\mathrm{T}}{I_\mathrm{p}}\rho. \end{gathered} \tag{94}$$

Prema rješenju u jednadžbi (94) vidimo da je raspodjela posmičnog naprezanja linearna po radijusu i ovisi o momentu uvijanja proporcionalno i obrnuto proporcionalno o polarnom momentu tromosti presjeka, I_p. Posmično naprezanje će uvijek biti najveće na vanjskom rubu štapa, tj. na slobodnoj površini i iznosit će:

$$\tau_\mathrm{max} = \frac{M_\mathrm{T}}{\frac{d^4\pi}{32}} r = \frac{M_\mathrm{T}}{\frac{d^4\pi}{32}\frac{2}{d}} = \frac{M_\mathrm{T}}{\frac{d^3\pi}{16}} = \frac{M_\mathrm{T}}{W_\mathrm{P}} \left| W_\mathrm{P} = \frac{d^3\pi}{16} \right|. \tag{95}$$

Na slici 7.4. prikazana je raspodjela posmičnog naprezanja po radijusu štapa punog i prstenastog presjeka. Za prstenasti presjek štapa polarni moment tromosti računamo prema $I_\mathrm{p} = \left(D^4 - d^4\right)\pi / 32$, a polarni moment otpora prema $W_\mathrm{p} = \left(D^4 - d^4\right)\pi / \left(16D\right)$. Deformirani oblik štapa pri uvijanju izračunavamo pomoću kuta zakreta dvaju susjednih presjeka na dijelu štapa koji ima stalne momente uvijanja, promjer i materijal, pa je kut zakreta desnog presjeka u odnosu na lijevi:

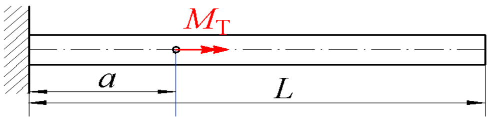
$$\begin{gathered} \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x} = \frac{M_\mathrm{T}}{GI_\mathrm{p}} \Rightarrow \mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}x \frac{M_\mathrm{T}}{GI_\mathrm{p}} \bigg| \int \Rightarrow \int \mathrm{d}\alpha = \int \mathrm{d}x \frac{M_\mathrm{T}}{GI_\mathrm{p}} \Rightarrow \\ \alpha\left(x_\mathrm{B}\right) = \alpha\left(x_\mathrm{A}\right) + \frac{M_\mathrm{T}\left(x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}\right)}{GI_\mathrm{p}} \Rightarrow \alpha_\mathrm{B} = \alpha_\mathrm{A} + \frac{M_\mathrm{T}^{\mathrm{A\text{-}B}} l_{\mathrm{A\text{-}B}}}{GI_\mathrm{p}}. \end{gathered} \tag{96}$$



Slika 7.4. Raspodjela posmičnog naprezanja po radijusu punog i prstenastog presjeka

7.2. Deformiranje štapa jednolikog presjeka

Za simbolično prikazan štap jednolikog presjeka prema slici 7.5. izračunat ćemo kut zakreta po duljini štapa. Zadano je: M_T, a, L, G i d.

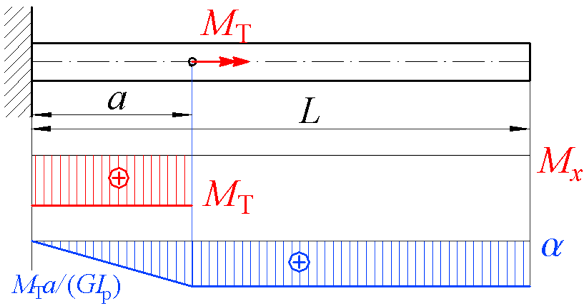


Slika 7.5. Štap jednolikog presjeka opterećen na uvijanje

Štap je punog presjeka promjera d. Iz tog podatka izračunavamo polarni moment tromosti presjeka $I_p = \pi d^4/32$. Nadalje crtamo dijagram raspodjele momenta uvijanja po štapu koji je prikazan na slici 7.6. Dio štapa od uklještenja do mjesta djelovanja momenta uvijanja je opterećen i napregnut, a ostali dio do slobodnog kraja nije opterećen. Prvi dio štapa koji je napregnut doživljava promjenu geometrije u smislu zakretanja susjednih presjeka, na jednak način cijelom tom duljinom, jer je opterećenje jednako, a time je promjer i polarni moment tromosti jednak, materijal jednak, pa su svugdje uvjeti isti. Na tom području kažemo da je relativni kut uvijanja jednak ili konstantan jer ga računamo prema $\vartheta = M_T / GI_p$. Presjek na duljini a se zarotira prema uklještenju za kut:

$$\alpha(a) = M_T a / GI_p. \qquad (97)$$

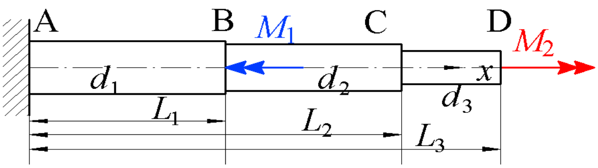
Taj zakret „dobiju" i svi presjeci desno od mjesta djelovanja momenta uvijanja jer „slijede" zakretanje presjeka na mjestu a te nisu opterećeni i neće promijeniti geometriju.



Slika 7.6. Dijagrami momenta uvijanja i kuta zakreta

Primjer 7.1. Deformiranje stupnjevanog štapa

Za štap prema slici 7.7. potrebno je izračunati kut zakreta presjeka D. Zadano je: M_1 = 2000 Nm, M_2 = 1000 Nm, d_1 = 30 mm, d_2 = 25 mm, d_3 = 20 mm, L_1 = 1000 mm, L_2 = 2000 mm, L_3 = 2 500 mm, G = 80 000 N/mm^2.



Slika 7.7. Štap stupnjevanog presjeka opterećen na uvijanje

Za izračun kuta zakreta pojedinih označenih presjeka (točaka) koristit ćemo jednadžbu (96). Za početak nam treba raspodjela momenta uvijanja po štapu, što je prikazano na slici 7.8. Polarni momenti tromosti presjeka su redom:

$$I_{p1} = 30^4 \pi / 32 = 79\,521\ \text{mm}^4,\quad I_{p2} = 25^4 \pi / 32 = 38\,349\ \text{mm}^4,$$

$$I_{p3} = 20^4 \pi / 32 = 15\,708\ \text{mm}^4.$$

Zakret presjeka B izračunat ćemo prema jednadžbi (96) uz postavljanje poznatog zakreta na lijevom kraju dijela štapa, što je uklještenje, pa slijedi:

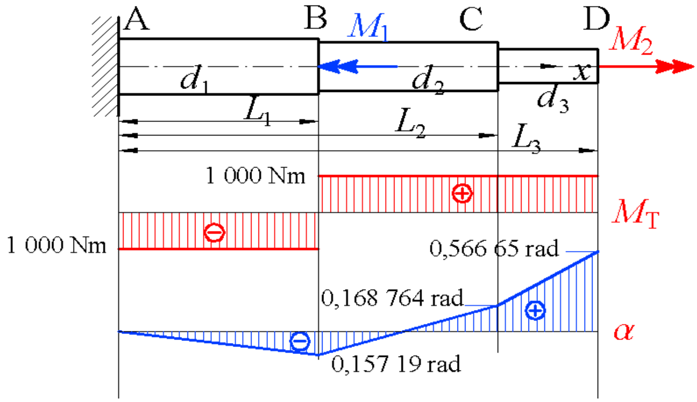
$$\alpha_A = 0,\ \alpha_B = \alpha_A + \frac{M_T^{A\text{-}B} l_{A\text{-}B}}{GI_{p1}} = 0 + \frac{-1\,000\,000 \cdot 1\,000}{79\,521 \cdot 80\,000} = -0{,}157\,19\ \text{rad}. \qquad (98)$$

Nadalje računamo zakrete presjeka C i D prema:

$$\alpha_{\mathrm{C}} = \alpha_{\mathrm{B}} + \frac{M_{\mathrm{T}}^{\mathrm{B\text{-}C}} l_{\mathrm{B\text{-}C}}}{GI_{\mathrm{p2}}} = -0{,}157\,19 + \frac{1\,000\,000 \cdot 1\,000}{38\,349 \cdot 80\,000} = 0{,}168\,764 \text{ rad},$$

$$\alpha_{\mathrm{D}} = \alpha_{\mathrm{C}} + \frac{M_{\mathrm{T}}^{\mathrm{C\text{-}D}} l_{\mathrm{C\text{-}D}}}{GI_{\mathrm{p3}}} = 0{,}168\,764 + \frac{1\,000\,000 \cdot 500}{15\,708 \cdot 80\,000} = 0{,}566\,65 \text{ rad}. \quad (99)$$

Na slici 7.8. prikazana je raspodjela kuta zakreta po duljini štapa.



Slika 7.8. Raspodjela kuta zakreta po štapu

7.3. Dimenzioniranje. Kriterij čvrstoće

U dijelovima strojeva i konstrukcija ne želimo trajnu promjenu oblika i mjera, tj. ne želimo plastično tečenje materijala. Plastično tečenje je poželjno pri preoblikovanju, primjerice kovanju, prešanju, dubokom vučenju, provlačenju, savijanju radi promjene oblika i sl. Ovo znači da ćemo postaviti granicu na naprezanje u materijalu štapova i svih ostalih dijelova strojeva i konstrukcija na vrijednost granice tečenja. Međutim, moramo uzeti u obzir i jednu nepovoljnu činjenicu, a to je da su sile, momenti i raspodijeljena opterećenja koja crtamo kao opterećenja štapova i nosača, koja su obično zadane vrijednosti, u stvarnosti posljedica međudjelovanja konstrukcije koju proračunavamo i okoline, ili drugih dijelova stroja ili konstrukcija. Uvijek postoji neka razina nesigurnosti u predviđene vrijednosti opterećenja, stoga moramo razmišljati što je s nesigurnim „dijelom" vrijednosti opterećenja, tj. kako osigurati funkcioniranje dijela stroja ili konstrukcije, a time i cjeline ako se dogodi povećana vrijednost opterećenja. Zato uvodimo faktor sigurnosti, koji predstavlja broj kojim se „odmičemo" najvećim naprezanjem od granice tečenja prema dolje, kako bismo imali neku zonu sigurnosti od plastičnog tečenja ako se i dogodi povećano opterećenje koje nećemo uzimati u normalnom radu, a koji nazivamo – nominalni uvjeti rada.

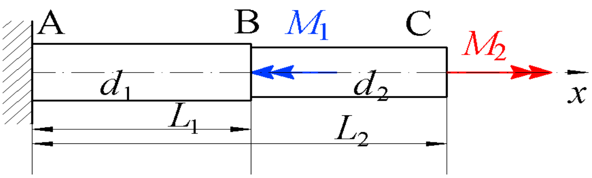
U slučaju krhkih materijala odmičemo se na isti način od granice loma, τ_L. Faktor sigurnosti označen je često sa S, f_s, β_s. Duktilni materijali principijelno nisu „osjetljivi" na smjer posmičnog naprezanja. Dopušteno naprezanje izračunavamo prema:

$$\tau_{dop} = \tau_T / f_s, \tau_{dop} = \tau_L / f_s. \tag{100}$$

U prethodnoj jednadžbi veličina τ_T kao granica (naprezanje) plastičnog tečenja i veličina τ_L kao granica loma, na primjer za krhke metalne materijale kao što su sivi lijev te kompoziti na bazi ugljičnih, staklenih i sličnih vlakana s duromernom matricom (najčešće *epoxy* „smola"), koji pucaju bez značajne plastične deformacije. Nadalje, pri uvijanju imamo dva kriterija za dimenzioniranje. Jedan je kriterij čvrstoće, što znači da ne želimo dopustiti najveće naprezanje iznad vrijednosti dopuštenog naprezanja.

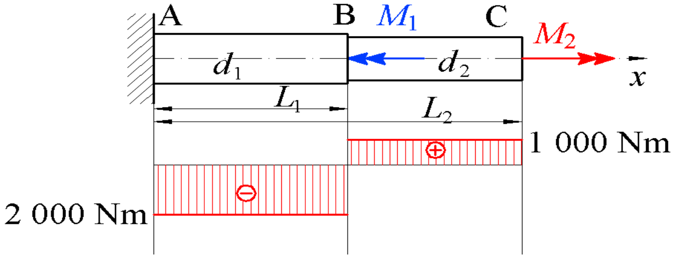
Primjer 7.2. Dimenzioniranje stupnjevanog štapa

Za štap prema slici 7.9. potrebno je odrediti promjere prema kriteriju čvrstoće. Zadano je: M_1 = 3000 Nm, M_2 = 1000 Nm, L_1 = 1000 mm, L_2 = 1600 mm, τ_{dop} = 120 MPa.



Slika 7.9. Štap stupnjevanog presjeka

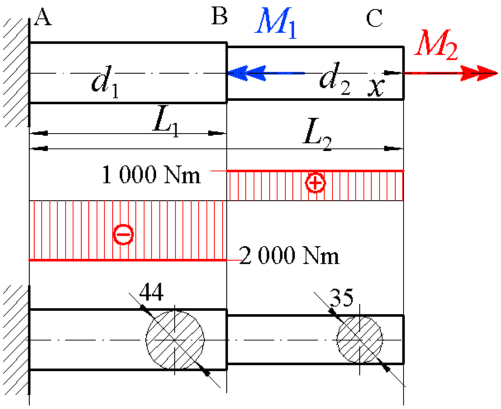
Duljine pojedinih dijelova štapa nisu bitne jer ne računamo pomake, već samo poprečne presjeke. Za dimenzioniranje nam treba raspodjela momenta uvijanja po štapu, što je prikazano na slici 7.8.



Slika 7.10. Raspodjela momenta uvijanja po štapu

Dimenzioniranje prema kriteriju čvrstoće predstavlja usporedbu najvećeg naprezanja na nekom dijelu štapa s dopuštenim naprezanjem za materijal štapa. Za svaki dio štapa prema dijagramu raspodjele momenta uvijanja izračunavamo najveće naprezanje te uspoređujemo (ograničavamo) s dopuštenim prema:

$$
\begin{aligned}
&M_{\mathrm{T}}^{1} = 2\,000\ \mathrm{Nm} \Rightarrow \tau_{\mathrm{T}}^{1} = M_{\mathrm{T}}^{1} / W_{\mathrm{p1}} < \tau_{\mathrm{dop}} \Rightarrow W_{\mathrm{p1}} > M_{\mathrm{T}}^{1} / \tau_{\mathrm{dop}} = 2\,000\,000 / 120 = 1{,}\dot{6} \cdot 10^{4}\ \mathrm{mm}^{3}, \\
&\qquad W_{\mathrm{p1}} = \pi d_{1}^{3} / 16 \Rightarrow d_{1} = \sqrt[3]{16 W_{\mathrm{p1}} / \pi} = \sqrt[3]{16 \cdot 1{,}\dot{6} \cdot 10^{4} / \pi} = 43{,}95\ \mathrm{mm}, \\
&M_{\mathrm{T}}^{2} = 1\,000\ \mathrm{Nm} \Rightarrow \tau_{\mathrm{T}}^{2} = M_{\mathrm{T}}^{2} / W_{\mathrm{p2}} < \tau_{\mathrm{dop}} \Rightarrow W_{\mathrm{p2}} > M_{\mathrm{T}}^{2} / \tau_{\mathrm{dop}} = 1\,000\,000 / 120 = 8{,}\dot{3} \cdot 10^{3}\ \mathrm{mm}^{3}, \\
&\qquad W_{\mathrm{p2}} = \pi d_{2}^{3} / 16 \Rightarrow d_{2} = \sqrt[3]{16 W_{\mathrm{p2}} / \pi} = \sqrt[3]{16 \cdot 8{,}\dot{3} \cdot 10^{3} / \pi} = 34{,}88\ \mathrm{mm}.
\end{aligned}
\tag{101}
$$



Slika 7.11. Promjeri štapa prema kriteriju čvrstoće

7.4. Dimenzioniranje. Kriterij krutosti

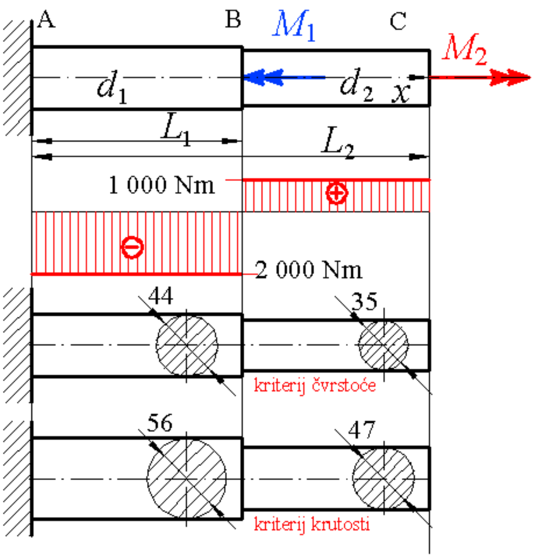
Drugi kriterij pri dimenzioniranju je kriterij krutosti, što znači da želimo ograničiti najveću vrijednost kuta zakreta po jedinici duljine ($\Delta\alpha/\Delta L$) izraženo u rad/m ili rad/mm. Tu veličinu ($\Delta\alpha/\Delta L$) zovemo relativni kut uvijanja, a u literaturi je ponekad označena s ϑ.

Primjer 7.3. Dimenzioniranje stupnjevanog štapa

Za štap prema slici 7.9. (iz primjera 7.2.) potrebno je dimnzionirati štap prema kriteriju krutosti. Zadano je: ϑ_{dop} = 1,5 °/m, G = 80 000 N/mm².

Za dimenzioniranje prema kriteriju krutosti trebamo jednadžbu (94) pa dobivamo:

$$
\begin{gathered}
M_T^1 = 2\,000 \text{ Nm} \Rightarrow \vartheta_1 = M_T^1 / GI_{p1} < \vartheta_{dop} \Rightarrow \\
I_{p1} > M_T^1 / G\vartheta_{dop} = 2\,000 / \left(8 \cdot 10^{10} \cdot (1{,}5\pi / 180)\right) = 9{,}55 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4, \\
I_{p1} = \pi d_1^4 / 32 \Rightarrow d_1 = \sqrt[4]{32 I_{p1} / \pi} = \sqrt[4]{32 \cdot 9{,}55 \cdot 10^{-7} / \pi} = 0{,}055\,85 \text{ m}, \\
M_T^2 = 1\,000 \text{ Nm} \Rightarrow \vartheta_2 = M_T^2 / GI_{p2} < \vartheta_{dop} \Rightarrow \\
I_{p2} > M_T^2 / G\vartheta_{dop} = 1\,000 / \left(8 \cdot 10^{10} \cdot (1{,}5\pi / 180)\right) = 4{,}775 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4, \\
I_{p2} = \pi d_2^4 / 32 \Rightarrow d_2 = \sqrt[4]{32 I_{p2} / \pi} = \sqrt[4]{32 \cdot 4{,}775 \cdot 10^{-7} / \pi} = 0{,}046\,96 \text{ m}.
\end{gathered}
\tag{102}
$$

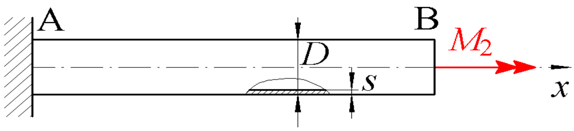


Slika 7.12. Promjeri stupnjeva štapa prema oba kriterija: čvrstoće gore, krutosti dolje

Promjeri stupnjeva štapa prema kriteriju krutosti su u mjerilu prikazani na slici 7.12.

Primjer 7.4. Dimenzioniranje štapa prstenastog presjeka

Za štap prema slici 7.13. potrebno je odrediti promjer prema kriteriju čvrstoće za puni presjek i prstenasti presjek s omjerom s/D = 0,15. Zadano je: M_T = 2000 Nm, τ_{dop} = 120 MPa.



Slika 7.13. Štap prstenastog presjeka

Moment uvijanja je stalan duž štapa pa je dimenzioniranje u ovom slučaju jednostavno. Ideja je prikazati koliko materijala utrošimo u slučaju punog presjeka i prstenastog presjeka. Promjer punog štapa određujemo prema:

$$M_{\mathrm{T}} = 2\,000 \text{ Nm} \Rightarrow \tau_{\mathrm{T}} = M_{\mathrm{T}} / W_{\mathrm{p}} < \tau_{\mathrm{dop}} \Rightarrow W_{\mathrm{p}} > M_{\mathrm{T}} / \tau_{\mathrm{dop}} = 2\,000\,000 / 120 = 1{,}\dot{6} \cdot 10^4 \text{ mm}^3,$$
$$W_{\mathrm{p}} = \pi d^3 / 16 \Rightarrow d = \sqrt[3]{16 W_{\mathrm{p}} / \pi} = \sqrt[3]{16 \cdot 1{,}\dot{6} \cdot 10^4 / \pi} = 43{,}95 \text{ mm}, \tag{103}$$
$$A = \pi 43{,}95^2 / 4 = 1\,517{,}1 \text{ mm}^2.$$

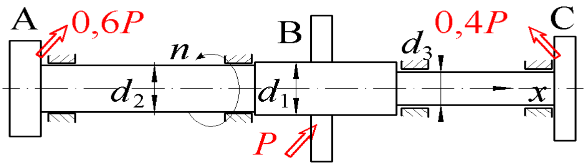
Prestenasti presjek dimenzionirat ćemo prema:

$$M_{\mathrm{T}} = 2\,000 \text{ Nm} \Rightarrow \tau_{\mathrm{T}} = M_{\mathrm{T}} / W_{\mathrm{p}} < \tau_{\mathrm{dop}} \Rightarrow W_{\mathrm{p}} > M_{\mathrm{T}} / \tau_{\mathrm{dop}} = 2\,000\,000 / 120 = 1{,}\dot{6} \cdot 10^4 \text{ mm}^3,$$
$$W_{\mathrm{p}} = 2 I_{\mathrm{p}} / D \Rightarrow 2\pi \left(D^4 - (0{,}7D)^4 \right) / 32 D \Rightarrow \tag{104}$$
$$0{,}149\,21 D^3 = 1{,}\dot{6} \cdot 10^4 \Rightarrow D = \sqrt[3]{1{,}\dot{6} \cdot 10^4 / 0{,}149\,21} = 48{,}16 \text{ mm},$$
$$d = 0{,}7 \cdot 48{,}16 = 33{,}71 \text{ mm}. \; A = \pi \left(48{,}16^2 - 33{,}71^2 \right) / 4 = 929{,}1 \text{ mm}^2.$$

Iz rješenja za presjeke (103) i (104) možemo zaključiti da za prstenasti presjek s debljinom stijenke 0,15D dobijemo omjer volumena (mase) materijala $A_{\mathrm{prsten}} / A_{\mathrm{puni}} = 929 / 1\,517 = 0{,}612$, tj. smanjenje potrebnog presjeka od 38,8 %. Još je veće smanjenje moguće smanjenjem debljine stijenke, stoga udaljavanja većine materijala na još veći radijus deformiranjem daju još veći moment uvijanja oko središnjice. Postoji granica mogućeg smanjenja debljine jer za vrlo tanku stijenku postoji opasnost od gubitka stabilnosti (gužvanja). Ovdje neće biti prikazana analiza graničnog omjera debljine stijenke prema vanjskom promjeru.

Primjer 7.5. Dimenzioniranje vratila s elementima prijenosa snage i gibanja

Za vratilo prema slici 7.14. koje prenosi snagu pri stalnoj brzini vrtnje potrebno je odrediti promjer prema kriteriju čvrstoće i krutosti za puni presjek. Vratilo je uležišteno tako da nema savijanja. Snaga koju vratilo dobiva na remenicu B je P, a razdjeljuje je na remenicu A u iznosu 0,4P, te na remenicu C u iznosu 0,6P. Zadano je: P = 4 kW, n = 720 min^{-1}, τ_{dop} = 120 MPa, ϑ_{dop} = 1,2 °/m, G = 80 000 N/mm^2.



Slika 7.14. Vratilo s tri remenice

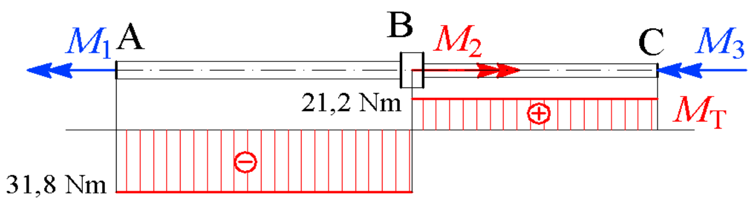
Vratilo pri prijenosu snage rotira stalnom brzinom pa izračunavamo moment (uvijanja) koji dolazi ili djeluje na remenici B.

$$P = M\omega,$$
$$\omega = 2\pi n = 2\pi 720/60 = 75,4\ \mathrm{s}^{-1}, \tag{105}$$
$$M_{\mathrm{B}} = P/\omega = 4\,000/75,4 = 53,05\ \mathrm{Nm}.$$

Na remenicama A i C djeluju momenti proporcionalni snazi koju ti elementi „odvode" ili predaju ostalim dijelovima sustava, tj. drugim remenicama:

$$M \quad = 0,4P/ \quad = 0,4\cdot 53,05 \approx 21,2\ \mathrm{Nm},$$
$$M \quad = 0,6P/ \quad = 0,6\cdot 53,05 \approx 31,8\ \mathrm{Nm}. \tag{106}$$

Dijagram raspodjele momenta uvijanja prikazan je na slici 7.15.



Slika 7.15. Dijagram raspodjele momenta uvijanja

Dimenzioniranje dijelova vratila prema kriteriju čvrstoće provodimo prema:

$$M_{\mathrm{T}}^{\mathrm{A}} = 31,8\ \mathrm{Nm} \Rightarrow \tau_{\mathrm{T}}^{\mathrm{A}} = M_{\mathrm{T}}^{\mathrm{A}}/W_{\mathrm{pA}} < \tau_{\mathrm{dop}} \Rightarrow W_{\mathrm{pA}} > M_{\mathrm{T}}^{\mathrm{A}}/\tau_{\mathrm{dop}} = 31\,800/120 = 265\ \mathrm{mm}^3,$$
$$W_{\mathrm{pA}} = \pi d_{\mathrm{A}}^3/16 \Rightarrow d_{\mathrm{A}} = \sqrt[3]{16W_{\mathrm{pA}}/\pi} = \sqrt[3]{16\cdot 265/\pi} = 11,05\ \mathrm{mm},$$
$$M_{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}} = 21,2\ \mathrm{Nm} \Rightarrow \tau_{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}} = M_{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}/W_{\mathrm{pB}} < \tau_{\mathrm{dop}} \Rightarrow W_{\mathrm{pB}} > M_{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}/\tau_{\mathrm{dop}} = 21\,200/120 = 176,\dot{6}\ \mathrm{mm}^3, \tag{107}$$
$$W_{\mathrm{pB}} = \pi d_{\mathrm{B}}^3/16 \Rightarrow d_{\mathrm{B}} = \sqrt[3]{16W_{\mathrm{pB}}/\pi} = \sqrt[3]{16\cdot 176,\dot{6}/\pi} = 9,65\ \mathrm{mm}.$$

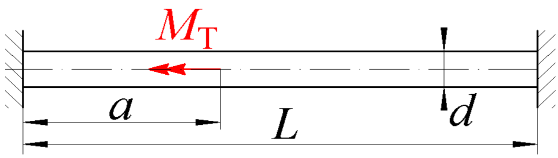
Dimenzioniranje dijelova vratila prema kriteriju krutosti provodimo prema:

$$M_{\mathrm{T}}^{\mathrm{A}} = 31,8\ \mathrm{Nm} \Rightarrow \vartheta_{\mathrm{A}} = M_{\mathrm{T}}^{\mathrm{A}}/GI_{\mathrm{pA}} < \vartheta_{\mathrm{dop}} \Rightarrow$$
$$I_{\mathrm{pA}} > M_{\mathrm{T}}^{\mathrm{A}}/G\vartheta_{\mathrm{dop}} = 31,8/\left(8\cdot 10^{10}\cdot(1,2\pi/180)\right) = 1,898\cdot 10^{-8}\ \mathrm{m}^4,$$
$$I_{\mathrm{pA}} = \pi d_{\mathrm{A}}^4/32 \Rightarrow d_{\mathrm{A}} = \sqrt[4]{32I_{\mathrm{pA}}/\pi} = \sqrt[4]{32\cdot 1,898\cdot 10^{-8}/\pi} = 0,020\,97\ \mathrm{m}, \tag{108}$$
$$M_{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}} = 21,2\ \mathrm{Nm} \Rightarrow \vartheta_{\mathrm{B}} = M_{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}/GI_{\mathrm{pB}} < \vartheta_{\mathrm{dop}} \Rightarrow$$
$$I_{\mathrm{pB}} > M_{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}/G\vartheta_{\mathrm{dop}} = 21,2/\left(8\cdot 10^{10}\cdot(1,2\pi/180)\right) = 1,265\cdot 10^{-8}\ \mathrm{m}^4,$$
$$I_{\mathrm{pB}} = \pi d_{\mathrm{B}}^4/32 \Rightarrow d_{\mathrm{B}} = \sqrt[4]{32I_{\mathrm{pB}}/\pi} = \sqrt[4]{32\cdot 1,265\cdot 10^{-8}/\pi} = 0,018\,95\ \mathrm{m}.$$

Na temelju proračuna u jednadžbama (107) i (108) za konačni odabir promjera vratila odabiremo na nekom mjestu veću vrijednost od dvije dobivene kriterijima čvrstoće i krutosti. Promjer dijela od remenice A odabiremo 21 mm, a od remenice C 19 mm.

7.5. Statički neodređeni štapovi

Statički neodređeni štapovi opterećeni na uvijanje imaju najmanje dva uklještenja, što vodi na jednu prekobrojnu reakciju, tj. jedan prekobrojni moment uvijanja u jednom od uklještenja. Takav jednostavan štap prikazan je na slici 7.16. Štap ima dva uklještenja, A i B. Za štap možemo postaviti jednu jednadžbu ravnoteže momenata oko središnjice (osi x) pa je razlika broja nepoznatih reakcija veza i jednadžbi ravnoteže jedan, tj. ovo je jednostruko ili jedanput statički neodređen štap opterećen na uvijanje.



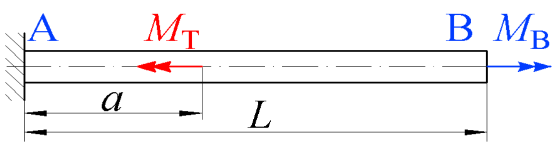
Slika 7.16. Statički neodređen štap opterećen na uvijanje

7.5.1. Primjena principa superpozicije

Za određivanje raspodjele statički neodređenih momenata uvijanja, kao i u slučaju osno opterećenih štapova, primjenjuje se princip superpozicije, i to uklanjanjem prekobrojnih veza s okolinom, dodavanjem odgovarajućih reakcija na tim mjestima te uvođenjem uvjeta deformiranja. Za primjer sa slike 7.16. oslobodit ćemo (ukloniti) uklještenje na mjestu točke B i dodati moment M_B kako je prikazano na slici 7.17. Uvjet deformiranja za točku B je $\alpha_B = 0$. Kut zakreta presjeka B opisat ćemo pomoću momenta uvijanja po štapu koji ovisi o reakciji u uklještenju B pa slijedi:

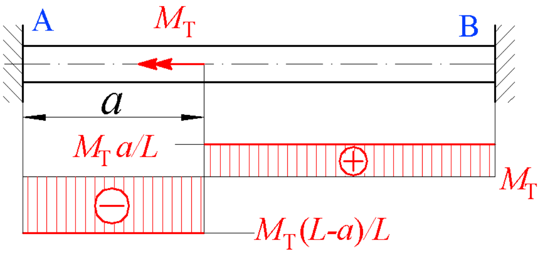
$$\alpha_B = \alpha_B\left(M_T\right) + \alpha_B\left(M_B\right) = 0 \Rightarrow \alpha_B\left(M_T\right) = -\frac{M_T a}{GI_p};\ \alpha_B\left(M_B\right) = \frac{M_B L}{GI_p}, \tag{109}$$

$$-\frac{M_T a}{GI_p} + \frac{M_B L}{GI_p} = 0 \Rightarrow M_B = M_T \frac{a}{L}.$$



Slika 7.17. Oslobađanje jedne prekobrojne veze štapa

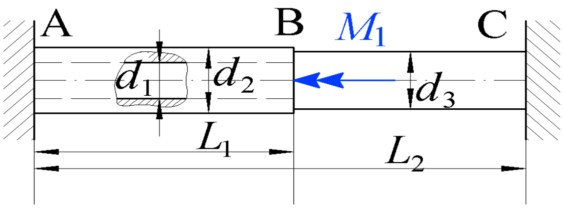
Sada možemo skicirati i kotirati dijagram momenta uvijanja za štap koji je prikazan na slici 7.18.



Slika 7.18. Dijagram momenta uvijanja za štap

Primjer 7.6. Dimenzioniranje stupnjevanog statički neodređenog štapa

Za štap prema slici 7.19. treba izračunati promjere dijelova štapa prema kriteriju: a) čvrstoće i b) krutosti. Dio štapa A-B izrađen je od prstenastog presjeka. Zadano je: M_1 = 2000 Nm, d_1, d_2 = 1,5 d_1, d_3 = 1,2 d_1, L_1 = 1000 mm, L_2 = 2000 mm, G = 80 000 N/mm², τ_{dop} = 150 MPa, ϑ_{dop} = 1,8 °/m.



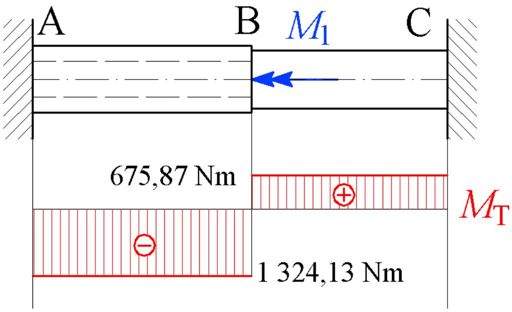
Slika 7.19. Dijagram momenta uvijanja za štap

Za izračun reakcije u uklještenju treba odabrati A i primijeniti princip superpozicije. Dio štapa A-B ima polarni moment tromosti

presjeka $I_{p1} = \pi\left[(1{,}5d)^4 - d^4\right]/32 = \pi\,4{,}0625d^4/32$, a puni dio B-C $I_{p1} = \pi(1{,}2d)^4/32 = \pi\,2{,}0736d^4/32$. Budući da smo krenuli s oslobađanjem uklještenja A, postavit ćemo uvjet deformiranja tog presjeka $\alpha_A = \alpha_A(M_A) + \alpha_A(M_1) = 0$. Uvjet deformiranja, detaljno napisan, je:

$$\frac{M_A L_1}{GI_{p1}} + \frac{M_A(L_2 - L_1)}{GI_{p2}} - \frac{M_1(L_2 - L_1)}{GI_{p2}} = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{M_A}{4{,}0625} + \frac{M_A}{2{,}0736} - \frac{M_1}{2{,}0736} = 0 \Rightarrow \tag{110}$$
$$0{,}728\,407M_A = 0{,}482\,253M_1 \Rightarrow M_A = 0{,}662\,065M_1 = 1\,324{,}13 \text{ Nm.}$$

Sada možemo nacrtati dijagram momenta uvijanja po štapu koji je prikazan na slici 7.20.



Slika 7.20. Raspodjela momenta uvijanja po štapu

Prema kriteriju čvrstoće provjerit ćemo, tj. ograničiti najveće naprezanje na dijelu A-B prema djelujućem momentu M_A prema:

$$\tau_T = \frac{M_A}{I_{p1}}\frac{1,5d}{2} < \tau_{dop} \Rightarrow 32\frac{1\,324\,130}{\pi\, 4,062\,5\, d^4}0,75d < 150 \Rightarrow$$
$$d^3 > 32\frac{1\,324\,130 \cdot 0,75}{\pi\, 4,062\,5 \cdot 150} \Rightarrow d > \sqrt[3]{32\frac{1\,324\,130 \cdot 0,75}{\pi\, 4,062\,5 \cdot 150}} = 25,5 \text{ mm.} \tag{111}$$

Za dio B-C prema kriteriju čvrstoće dobivamo:

$$\tau_T = \frac{M_C}{I_{p2}}\frac{1,2d}{2} < \tau_{dop} \Rightarrow 32\frac{675\,870}{\pi\, 2,073\,6\, d^4}0,6d < 150 \Rightarrow$$
$$d^3 > 32\frac{675\,870 \cdot 0,6}{\pi\, 2,073\,6 \cdot 150} \Rightarrow d > \sqrt[3]{32\frac{675\,870 \cdot 0,6}{\pi\, 2,073\,6 \cdot 150}} = 23,68 \text{ mm.} \tag{112}$$

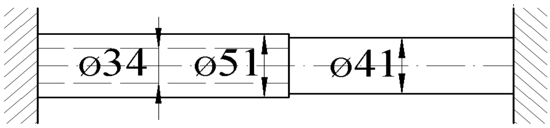
Prema kriteriju krutosti provjerit ćemo, tj. ograničiti najveće relativno uvijanje, tj. relativni kut uvijanja na dijelu A-B prema djelujućem momentu M_A prema:

$$\vartheta = \frac{M_A}{GI_{p1}} < \vartheta_{dop} \Rightarrow 32\frac{1\,324,130}{8\cdot 10^{10}\pi\, 4,062\,5\, d^4} < \frac{1,8\pi}{180} \Rightarrow$$
$$d^4 > \frac{32\cdot 1\,324,130 \cdot 180}{8\cdot 10^{10}\pi^2\, 4,062\,5 \cdot 1,8} \Rightarrow d > \sqrt[4]{32\frac{1\,324,130 \cdot 180}{8\cdot 10^{10}\pi^2\, 4,062\,5 \cdot 1,8}} = 0,033\,9 \text{ m.} \tag{113}$$

Za dio B-C prema kriteriju krutosti dobivamo:

$$\vartheta = \frac{M_\mathrm{C}}{GI_{\mathrm{p2}}} < \vartheta_{\mathrm{dop}} \Rightarrow 32\frac{675,87}{8\cdot 10^{10}\pi\, 2,073\,6\, d^4} < \frac{1,8\pi}{180} \Rightarrow$$
$$d^4 > \frac{32\cdot 675,87\cdot 180}{8\cdot 10^{10}\pi^2\, 2,073\,6\cdot 1,8} \Rightarrow d > \sqrt[4]{\frac{32\cdot 675,87\cdot 180}{8\cdot 10^{10}\pi^2\, 2,073\,6\cdot 1,8}} = 0,033\,9\ \mathrm{m}. \qquad (114)$$

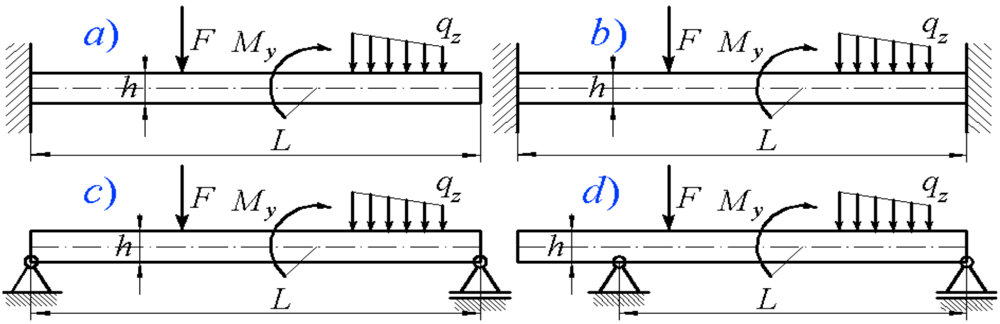
Vrijednost promjera koji zadovoljava sve kriterije najveći je od izračunatih u jednadžbama od (111) do (114), što je 33,9 mm. To nam daje promjere štapa po dijelovima kako je kotirano na slici 7.21.



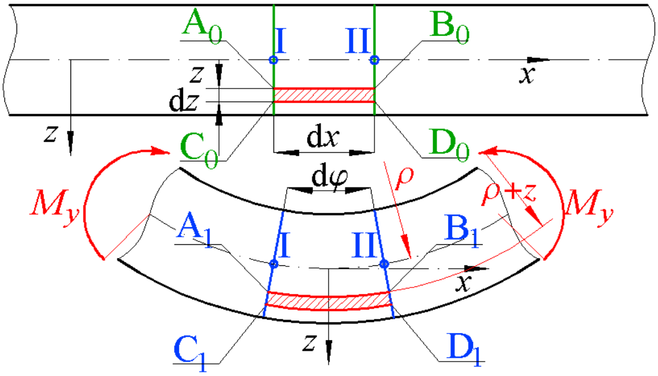
Slika 7.21. Promjeri štapa

8. SAVIJANJE TANKIH RAVNIH ŠTAPOVA

Štapovi kao dijelovi konstrukcija i strojeva prikazani na slici 8.1. mogu biti opterećeni poprečnim silama, raspodijeljenim opterećenjima i spregovima (momentima savijanja), pa za njih kažemo da su opterećeni na savijanje. Pojednostavljeno proračunavanje naprezanja u štapovima temelji se na ograničenjima geometrije koja podrazumijevaju da je štap ravan, tj. da je njegova središnjica (težišnica) ravna, da se poprečni presjek mijenja blago, ili je stalan po duljini, a da je najveća poprečna mjera presjeka pet ili više puta manja od duljine između oslonaca. Takav štap nazivamo i nosač, greda ili konzola, ovisno o načinu oslanjanja (osloncima), tj. vezi s okolinom. Uvjet da dio konstrukcije računamo kao nosač opterećen na savijanje, u skladu sa slikom 8.1., zadovoljen je uvjet $h < L/5$. Takve nosače zovemo i tanki nosači. Na slici 8.1.a) prikazan je nosač, na jednom kraju ukliješten, koji nazivamo konzola, na slici 8.1.b) nosač na oba kraja ukliješten, na slici 8.1.c) nosač na dva zglobna oslonca, koji zovemo greda, i na slici 8.1.d) prikazan je nosač ili greda s prepustom.



Slika 8.1. Nosači: a) konzola, b) greda s dva uklještenja, c) greda na dva zglobna oslonca i d) greda s prepustom



Slika 8.2. Stap opterećen na savijanje prije i poslije opterećenja

8.1. Povezivanje opterećenja, geometrije i raspodjele naprezanja

Znanstvenici su kroz istraživanja u 17. i 18. stoljeću [1] mjerenjem ustvrdili da je dovoljno točna pretpostavka o deformiranju poprečnih presjeka. Na slici 8.2. to su dvije vertikalne dužine kroz mjeru h, pri čemu ih tijekom deformiranja smatramo krutim figurama koje se zakreću jedna u odnosu na druge. Deformirani položaj dvaju susjednih presjeka na slici 8.2. prikazan je plavom bojom. Koordinatni sustav postavljamo u težišnicu nosača s ishodištem na lijevom kraju nosača. Os x je uzdužna, os y je usmjerena iz ravnine crtanja, a os z je usmjerena prema dolje. Deformirani oblik nosača na slici 8.2. koji je nacrtan zakrivljen, prikazan je pretjerano zakrivljen kako bi se lakše prikazali parametri promjene geometrije. Pretpostavka za ovu analizu deformiranja je jednoosno stanje naprezanja, tj. postoji samo komponenta naprezanja σ_x koja je posljedica djelovanja sprega oko osi y, označenog s M_y. Težišnica, koja je početno ravna, prelazi u kružnicu radijusa zakrivljenosti ρ jer su uvjeti deformiranja na promatranom dijelu nosača stalni na svakom presjeku – djeluje isti spreg (moment savijanja). Pretpostavljamo da nosač ima isti poprečni presjek, da je materijal svugdje istih svojstava, homogen i izotropan i da će se svaki presjek stoga zakrenuti za isti kut. Dva bliska presjeka gore na slici 8.2., razmaknuti za dx, prilikom deformiranja zakrenu se za dφ. Na težišnici pretpostavljamo da je naprezanje jednako nuli, stoga će sve dužine na težišnici prije i poslije deformiranja imati istu duljinu. To ćemo iskoristiti za povezivanje dφ i radijusa zakrivljenosti ρ prema:

$$\mathrm{d}x = \rho \mathrm{d}\varphi. \tag{115}$$

Na različitim mjestima po presjeku promjena duljine dx početne zamišljene dužine $\mathrm{A_0B_0}$ povezana je preko radijusa zakrivljenosti težišnice jer deformirani oblik dužine $\mathrm{A_1B_1}$ ima radijus zakrivljenosti $\rho+z$ pa dobivamo:

$$l\left(\mathrm{A_1B_1}\right) = \left(\rho + z\right)\mathrm{d}\varphi. \tag{116}$$

Duljinsku deformaciju odredit ćemo kao omjer promjene duljine dužine A_1B_1 i početne duljine dužine A_0B_0:

$$\varepsilon_x(z) = \frac{(\rho + z)\mathrm{d}\varphi - \rho\mathrm{d}\varphi}{\rho\mathrm{d}\varphi} = \frac{z}{\rho}. \tag{117}$$

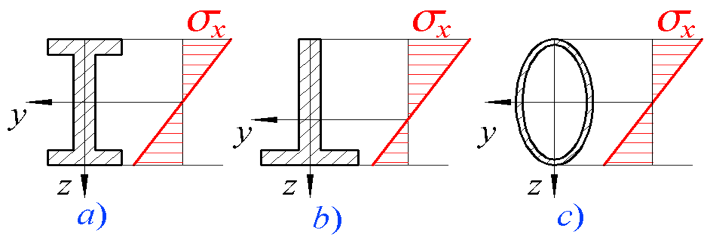
Prema Hookeovom zakonu za jednoosno stanje naprezanja slijedi da je $\sigma_x = \varepsilon_x E = Ez/\rho$. Nadalje možemo povezati opterećenje, spreg (moment savijanja) M_y i geometriju nosača u vidu visine i širine (oblika) presjeka. To ćemo postići postavljanjem elementarne male sile $\mathrm{d}F_x$ na maloj površini omeđenoj točkama A_1C_1 i po širini odgovarajućim točkama, na istoj koordinati z, ili B_1D_1, pa ćemo dobiti: $\mathrm{d}F_x = \sigma_x \mathrm{d}A = Ezb(z)\mathrm{d}z/\rho$. Svaka elementarna sila ima krak z prema osi y koju zovemo neutralna os zbog naprezanja koje je nula na z = 0, pa stvara elementarni moment savijanja $\mathrm{d}M_y = \mathrm{d}F_x z = Ez^2 b(z)\mathrm{d}z/\rho$. Zbrajanjem tih elementarnih momenata dobivamo:

$$\int_A \mathrm{d}M_y = \int_A Ez^2 b(z)\mathrm{d}z/\rho = \frac{E}{\rho}\int_A z^2 b(z)\mathrm{d}z = \frac{E}{\rho} I_y = M_y. \tag{118}$$

Ovdje nije detaljno opisan izračun momenta tromosti površine presjeka I_y jer je to bila tema u jednom od prethodnih poglavlja. Analizom dobivamo poveznicu vanjskog opterećenja i geometrije. Zasad ćemo radijus zakrivljenosti težišnice, koju zovemo i elastična linija, iskoristiti samo za izračunavanje raspodjele naprezanja po presjeku:

$$\frac{E}{\rho} = \frac{M_y}{I_y} \rightarrow \sigma_x = \frac{E}{\rho} z = \frac{M_y}{I_y} z. \tag{119}$$

Iz jednadžbe (119) vidimo da je linearna raspodjela naprezanja po visini presjeka najveća na najudaljenijem dijelu presjeka od težišnice. Različiti oblici presjeka daju različite linearne raspodjele naprezanja, a primjeri bez konkretnih brojeva prikazani su na slici 8.3.

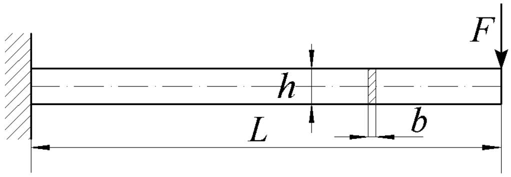


Slika 8.3. Raspodjela naprezanja po presjeku nosača: a) I profil, b) T profil i c) simetrična elipsasta cijev

8.2. Dimenzioniranje nosača

Primjer 8.1. Dimenzioniranje konzole

Za nosač (konzolu) prema slici 8.4. potrebno je odrediti presjek, tj. dimenzionirati. Presjek je pravokutni s omjerom stranica $h/b = 4$.
Zadano je: $F = 2000$ N, $L = 1000$ mm, $\sigma_T = 220$ N/mm^2, $f_s = 1{,}5$.



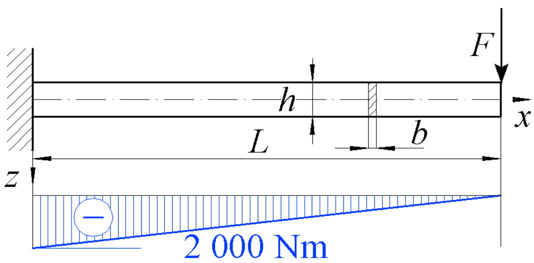
Slika 8.4. Konzolni nosač opterećen silom na kraju

Za dimenzioniranje nam treba raspodjela opterećenja, što je za savijanje prvenstveno moment savijanja. Uslijed savijanja u materijalu se javlja reakcija koju zovemo – normalna komponenta naprezanja. Raspodjela momenta savijanja prikazana je na slici 8.5. bez detalja oko crtanja i određivanja predznaka. Za nosač s konstantnim poprečnim presjekom tražimo presjek s najvećim iznosom momenta savijanja, pozitivnim ili negativnim, a za duktilne materijale je jednako što se tiče dimenzioniranja. Za ovaj konzolni nosač taj kritični presjek je uklještenje. Dimenzioniramo postavljajući ograničenje da je najveće normalno naprezanje jednako dopuštenom prema:

$$\sigma_{\max} = \frac{2\,000\,000}{I_y}\frac{h}{2} = \frac{2\,000\,000}{W_y} < \sigma_{\text{dop}} = \frac{\sigma_T}{f_s} = \frac{220}{1{,}5} = 146{,}\dot{6},$$

$$W_y = \frac{bh^2}{6} = \frac{b\left(4b\right)^2}{6} = \frac{2\,000\,000}{146{,}\dot{6}} \Rightarrow b^3 = \frac{6}{16}\frac{2\,000\,000}{146{,}\dot{6}} \Rightarrow \tag{120}$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{6}{16}\frac{2\,000\,000}{146{,}\dot{6}}} = 17{,}228 \text{ mm} = 18\ \left(20\right) \text{ mm},\ b = 4\cdot 18\ \left(20\right) = 72\left(80\right)\text{mm}.$$

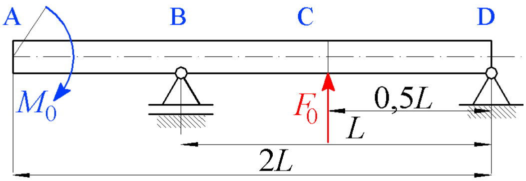


Slika 8.5. Raspodjela (dijagram) momenta savijanja za konzolu

U rješenju su navedene vrijednosti „izvan" zagrade, b x h = 18 x 72 mm, i u zagradi 20 x 80 mm. Razlog je u tehnologiji izrade, tj. poluproizvodu koji bi mogao biti primijenjen za izradu ovakve konzole. Ako je to vruće valjani profil, onda je dobavljiva debljina 20 mm, a ako je lijevani, kovani, prešani ili sl., onda je moguća i debljina od 18 mm.

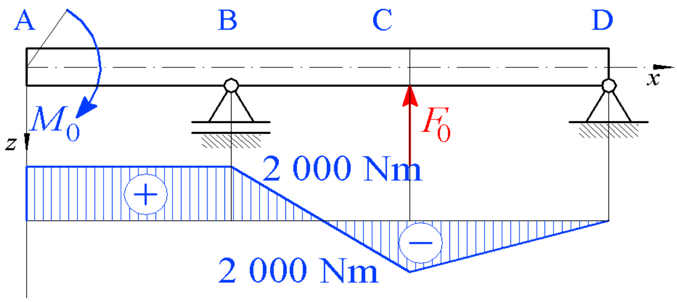
Primjer 8.2. Dimenzioniranje grede s prepustom

Za nosač prema slici 8.6. potrebno je odrediti presjek, tj. dimenzionirati. Presjek je pravokutna cijev od konstrukcijskog čelika St37 (S235), omjera visine i širine 2:1. Debljina stijenke je proizvoljna. Zadano je: M_0 = 2000 Nm, F_0 = 10 000 N, L = 1200 mm, σ_T = 235 N/mm², f_s = 1,5.



Slika 8.6. Greda s prepustom opterećena silom i spregom

Za izračun naprezanja potrebna je raspodjela momenta savijanja po nosaču. Na slici 8.7. prikazan je dijagram momenta savijanja.



Slika 8.7. Raspodjela momenta savijanja za gredu s prepustom

Materijal zadan za nosač ima jednaka svojstva pri rastezanju i sabijanju, a pravokutna cijev je simetričan profil što znači da će jednak iznos naprezanja biti na vanjskoj površini, iznad i ispod težišnice, pa možemo zanemariti predznak momenta savijanja i uzeti samo ekstremne vrijednosti. Budući da imamo dva ekstrema funkcije momenta savijanja, možemo zaključiti da je za proračun najvećeg naprezanja mjerodavan iznos od 2000 Nm. Pravokutne cijevi su standardiziran proizvod valjaonica pa dolaze s debljinama stijenke u koracima počevši od 1,5 mm, 2 mm, 3 mm itd. Debljina stijenke je jako povezana s poprečnim mjerama pa je primjerice moguće nabaviti 50 x 25 mm vanjske mjere s debljinom stijenki 1,5, 2 i 3 mm.

Za dimenzioniranje ovakvog nosača potrebno je provjeravati dostupne mjere iz kataloga nekog proizvođača crne metalurgije. Najveće naprezanje izračunat ćemo i ograničiti prema:

$$\sigma_{\max} = \frac{2\,000\,000}{I_y}\frac{h}{2} < \sigma_{\mathrm{dop}} = \frac{\sigma_{\mathrm{T}}}{f_s} = \frac{235}{1,5} = 156. \qquad (121)$$

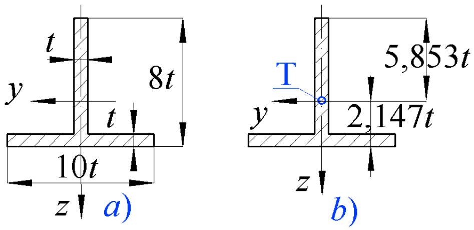
Za odabir profila možemo primijeniti pristup pokušaj – pogreška (predictor – corrector) budući da ne možemo lako prikazati rješenje za debljinu i visinu profila kao jednadžbu. Princip ili metoda pokušaj – pogreška se temelji na odabiru skupa parametara ili varijabli koje sudjeluju u rješenju, u našem slučaju visine i debljina stijenke, jer je širina pola visine. Onda računamo uvjet čvrstoće, tj. najveće naprezanje na tom profilu. U općem slučaju odabrani profil bit će ili nedovoljan za zadano opterećenje ili prekomjeran. Prihvatljivo je za usvajanje profila razlika od 10 % od zadovoljavanja uvjeta čvrstoće, tako da je omjer dopuštenog i najvećeg naprezanja jednak 1,1 f_s. U tablici 1 prikazani su rezultati proračuna profila.

Tablica 2. Iterativno računanje naprezanja za pravokutnu cijev

***h*, mm**	***s*, mm**	**I_y, mm^4**	**$\sigma_{x,\max}$, N/mm^2**	**f_s**
60	3	225 072	266,58	<1,5
60	4	282 219	212,6	<1,5
80	**3**	558 532	143,23	1,63

Primjer 8.3. Dimenzioniranje nosača s T presjekom

Za nosač prema slici 8.6. potrebno je odrediti presjek, tj. dimenzionirati. Presjek je profil prikazan na slici 8.8. Materijal ima lomnu čvrstoću pri rastezanju $\sigma_{\mathrm{L}}^{\mathrm{v}} = 150$ MPa i pri sabijanju $\sigma_{\mathrm{L}}^{\mathrm{t}} = 200$ MPa . Zadano je: f_s = 1,5.



Slika 8.8. T profil: a) parametarske mjere i b) položaj težišta

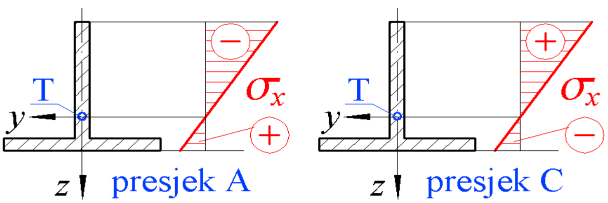
Materijal ima različita svojstva pri rastezanju i sabijanju pa ćemo zato svaku od vrijednosti lomne čvrstoće podijeliti s traženim faktorom sigurnosti te dobiti dopuštena naprezanja pri rastezanju i sabijanju. $\sigma_{\mathrm{v,dop}} = \sigma_{\mathrm{L}}^{\mathrm{v}} / f_{\mathrm{s}} = 150/1{,}5 = 100$ MPa, $\sigma_{\mathrm{t,dop}} = \sigma_{\mathrm{L}}^{\mathrm{t}} / f_{\mathrm{s}} = 200/1{,}5 = 133$ MPa. Moment tromosti presjeka izračunat ćemo kao jednadžbu jer su zadani omjeri u geometriji preko parametra *t*.

$$z_{\mathrm{T}} = \frac{10t^2 \cdot (-0{,}5t) + 7t^2 \cdot (-4{,}5t)}{10t^2 + 7t^2} = -2{,}147t.\ y_{\mathrm{T}} = 0,$$

$$I_y = \left[\frac{t \cdot (7t)^3}{12} + 7t^2 \cdot (4{,}5t - 2{,}147t)^2 \right] + \left[\frac{t^3 \cdot 10t}{12} + 10t^2 \cdot (0{,}5t - 2{,}147t)^2 \right] = \tag{122}$$

$$67{,}34t^4 + 27{,}96t^4 = 95{,}3t^4.$$

Nakon toga moramo gledati mjesta na nosaču na kojima su ekstremne vrijednosti momenta savijanja te raspodjelu naprezanja na tim presjecima. Dva su presjeka s ekstemnim vrijednostima momenta savijana, i to su presjeci (točke) A i C, u kojima je moment savijanja 2000 Nm u presjeku A pozitivnog predznaka, a u presjeku C negativnog. Različiti predznaci momenta savijanja znače da je pozitivno naprezanje na različitim stranama presjeka gore odnosno dolje. Raspodjelu naprezanja u kontekstu predznaka, ali ne i vrijednosti, jer nemamo vrijednost parametra *t,* možemo predvidjeti prema dijagramu momenta savijanja na slici 8.7. Na slici 8.9. prikazana je raspodjela naprezanja kvalitativno na dva presjeka s ekstremima momenta savijanja.

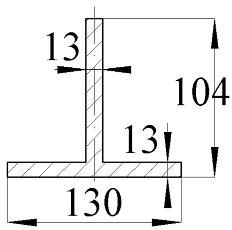


Slika 8.9. Kvalitativna raspodjela naprezanja po T presjecima

Dimenzioniramo presjek prema kriterijima čvrstoće u oba presjeka. Postavljamo uvjete tako da je dopušteno naprezanje manje od najvećeg u pojedinim dijelovima (točkama) presjeka prema:

$$
\begin{gathered}
\text{presjek A: } M_y = 2\,000\,000 \text{ Nmm} \Rightarrow \\
z = -5{,}853t \Rightarrow \sigma_x = \left| \frac{2\,000\,000}{59{,}3t^4}(-5{,}853t) \right| < 133 \Rightarrow t = 11{,}5 \text{ mm}, \\
z = 2{,}147t \Rightarrow \sigma_x = \left| \frac{2\,000\,000}{59{,}3t^4}(2{,}147t) \right| < 100 \Rightarrow t = 9 \text{ mm}, \\
\text{presjek C: } M_y = -2\,000\,000 \text{ Nmm} \Rightarrow \\
z = -5{,}853t \Rightarrow \sigma_x = \left| \frac{-2\,000\,000}{59{,}3t^4}(-5{,}853t) \right| < 100 \Rightarrow t = 12{,}55 \text{ mm}, \\
z = 2{,}147t \Rightarrow \sigma_x = \left| \frac{2\,000\,000}{59{,}3t^4}(2{,}147t) \right| < 133 \Rightarrow t = 8{,}2 \text{ mm}.
\end{gathered}
\tag{123}
$$

Na temelju rješenja iz (123) možemo nacrtati presjek u mjerilu, kao na slici 8.10. Materijali koji nemaju istu čvrstoću pri rastezanju i sabijanju, reda veličine 200 MPa, često su ljevovi, sivi lijev, nodularni lijev i sl., zbog kojih moramo dodatno razmišljati o tehnologičnosti izvedbe presjeka, pa je slika 8.10. samo simboličan prikaz mjera, ne nužno i konačni oblik. Materijali nejednolike čvrstoće pri sabijanju i rastezanju su i kompoziti, no često veće čvrstoće od navedenih u primjeru. U njhovom slučaju treba razmišljati o izvedivosti presjeka, tj. tehnologičnosti.



Slika 8.10. Poprečni T presjek nosača

Jedan drugačiji način proračuna uvjeta čvrstoće za materijale koji imaju jednaku čvrstoću pri rastezanju i sabijanju te za dvostruko simetrične presjeke je izračunavanje momenta otpora presjeka, što je samo drugačije zapisan oblik izračuna najveće vrijednosti naprezanja prema:

$$
\sigma_{x,\max} = \frac{M_y}{I_y} z_{\max} = \frac{M_y}{\left(I_y / z_{\max}\right)} = \frac{M_y}{W_y}, \; W_y = \frac{I_y}{z_{\max}} = \frac{2I_y}{h}. \tag{124}
$$

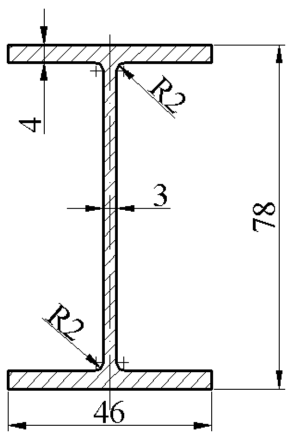
Primjer 8.4. Dimenzioniranje nosača od standardnog vruće valjanog I profila

Za nosač prema slici 8.6. treba odrediti presjek, tj. dimenzionirati. Presjek je standardni I profil. Materijal je konstrukcijski čelik St37 (S235). Zadano je: σ_T = 235 MPa, f_s = 1,5.

Za odabir profila uzet ćemo podatke o momentu otpora koji nam je minimalno potreban za zadovoljavanje uvjeta čvrstoće. Iz momentnog dijagrama očitat ćemo najveći apsolutni iznos momenta savijanja, 2 000 000 Nmm, s dopuštenim naprezanjem od 156 MPa pa ćemo dobiti potreban moment otpora prema:

$$\sigma_{x,\max} = \frac{M_y}{W_y} < \sigma_{\text{dop}} \Rightarrow W_y > \frac{M_y}{\sigma_{\text{dop}}} = \frac{2\,000\,000}{156} = 12\,820\ \text{mm}^3. \qquad (125)$$

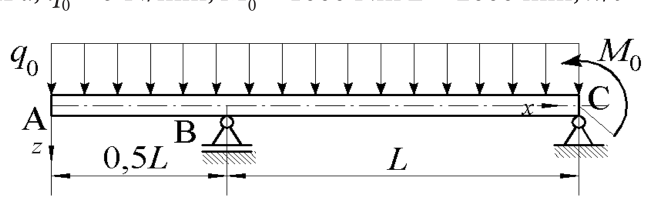
Nakon toga ćemo iz tablice podataka za I profile (prema DIN 1025-1:1995-05) tražiti jedan oblik I profila IPE. IPE AAA 80 je prvi najmanji profil koji zadovoljava kriterij za moment otpora pa dobivamo $W_y = 15,23 \cdot 10^3\ \text{mm}^3$. Profil IPE AAA 80 prikazan je na slici 8.11.



Slika 8.11. Presjek IPE AAA 80

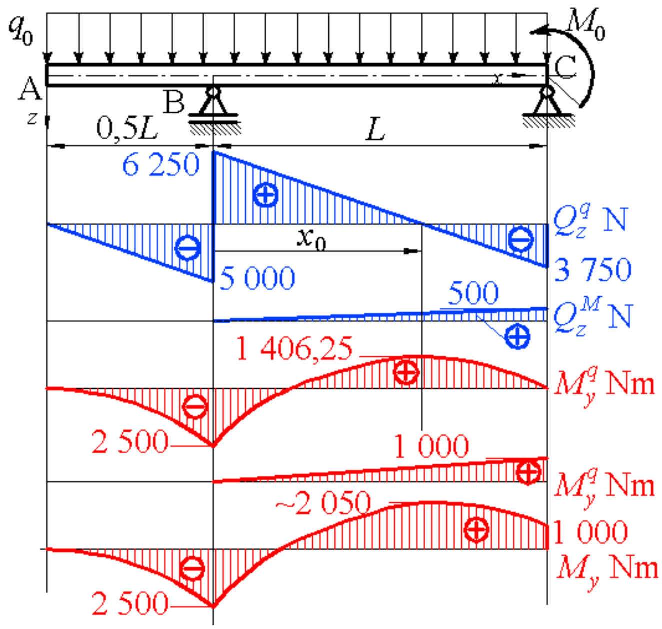
Primjer 8.5. Dimenzioniranje nosača s prepustom

Nosač prema slici 8.12. potrebno je dimenzionirati kao pravokutnu cijev proizvoljne debljine stijenke. Materijal je konstrukcijski čelik St60 (S355). Zadano je: σ_T = 355 MPa, q_0 = 5 N/mm, M_0 = 1000 Nm L = 2000 mm, h/b = 2, f_s = 1,5.



Slika 8.12. Nosač s prepustom opterećen raspodijeljenim opterećenjem i spregom

Prvi korak u dimenzioniranju je izračun opterećenja, što je za nosače opterećene na savijanje, moment savijanja. Budući da očekujemo raspodjelu momenta savijanja kao krivulju po dijelovima nosača različito opisanu (odnosno krivulja momenta savijanja ima lom na mjestu oslonca B), onda je korisno najprije izračunati i nacrtati raspodjelu poprečne sile Q_z. Za te potrebe trebamo izračunati reakcije u osloncima. Pomoć pri računanju reakcija može biti „razlaganje" opterećenja, tj. primjena principa superpozicije, budući da pretpostavljamo da je linearna veza opterećenja i reakcija, kao i ostalih unutrašnjih veličina u nosaču, kao npr. momenta, pomaka itd. To ukratko znači da je ukupna reakcija u promatranom osloncu, npr. B, jednaka zbroju reakcije u tom osloncu (ako promatramo samo opterećenje q_0 i samo M_0). Crtanje dijagrama je također malo lakše ako tako pristupimo. Bez prikaza detalja izračuna, reakcije u osloncima su: R_z^B = 11 250 + 500 = 11 750 N prema gore i R_z^C = 3750 - 500 = 3250 N prema gore. Iz toga slijede dijagrami prikazani na slici 8.13.



Slika 8.13. Dijagrami poprečne sile i momenta savijanja

Na dijagramu momenta savijanja kotirana je vrijednost ~2050 Nm, koja je nastala zbog približnog zbrajanja krivulje parabole uslijed q_0 i pravca uslijed M_0 grafički, umjesto analitički. Moguća je greška od oko 30 Nm, no to i dalje ne mijenja točan podatak, kao dominantan u proračunu, dimenzioniranju, od 2500 Nm na mjestu oslonca B. Budući da je primijenjen materijal s duktilnim svojstvima, odnosno konstrukcijski čelik, biramo mjesto s najvećom apsolutnom vrijednosti momenta savijanja, a ne uzimamo u obzir predznak.

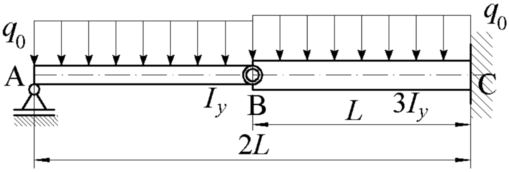
Zatim dimenzioniramo pravokutnu cijev s unaprijed odabranom debljinom stijenke prema najvećem momentu savijanja. Za očekivane mjere cijevi 80/40 odabrat ćemo debljinu stijenke od najmanje 3 mm, za mjere preko 100/50 debljinu stijenke od najmanje 4 mm i sl. Dalje proračunamo minimalni potrebni presjek kako je prikazano u tablici 3.

Tablica 3. Mjere pravokutnog profila za nosač

***h*, mm**	***b*, mm**	***s*, mm**	**I_y, mm^4**	**$\sigma_{x,\max}$, N/mm^2**	**f_s**
60	30	3	225 072	333,2	<1,5
100	50	4	1 441 259	86,7	4,1
80	**40**	**3**	558 532	179,0	1,98

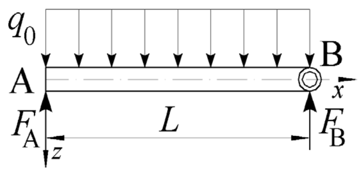
Primjer 8.5. Dimenzioniranje nosača s Gerberovim zglobom

Za nosač prema slici 8.14. potrebno je dimenzionirati zasebno dva dijela nosača s Gerberovim zglobom. Presjek je pravokutna cijev. Presjeci trebaju biti odabrani tako da je za desni dio nosača trostruko veći moment tromosti presjeka nego za lijevi jer je on pretpostavljeni uvjet za kasnije proračunavanje deformiranja nosača. Materijal je konstrukcijski čelik St60 (S355). Zadano je: σ_T = 355 MPa, q_0 = 2 N/mm, L = 2500 mm, h/b = 2, f_s = 1,5.



Slika 8.14. Nosač s Gerberovim zglobom

Prvi korak u rješavanju ovog primjera je određivanje reakcije veza. Na slici 8.15. ucrtane su pretpostavljene reakcije u rubovima lijevog dijela nosača. Budući da na ovaj nosač djeluju tri reakcije veza, sila u točki A te sila i moment u točki C, za određivanje reakcija, osim dvije nezavisne jednadžbe ravnoteže, trebamo dodatnu jednadžbu. Ta dodatna jednadžba dolazi iz uvjeta da je moment savijanja jednak nuli u Gerberovom zglobu, točka B. Reakcije ćemo odrediti promatrajući ravnotežu lijevog dijela nosača, odnosno silu u Gerberovom zglobu, i pomoću te sile odrediti reakcije na desnom dijelu nosača.



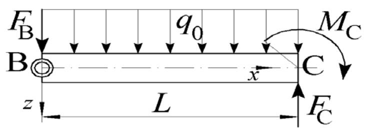
Slika 8.15. Ravnoteža lijevog dijela grede

Za zamišljeno oslobođen lijevi dio nosača jednadžbe ravnoteže i reakcije su:

$$\begin{gathered}\sum F_z = 0 \Rightarrow F_{\mathrm{A}} + F_{\mathrm{B}} = q_0 L, \\ \sum M_A = 0 \Rightarrow F_{\mathrm{B}} L + q_0 L \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow F_{\mathrm{B}} = q_0 \frac{L}{2} \Rightarrow F_{\mathrm{A}} = q_0 \frac{L}{2}.\end{gathered} \tag{126}$$

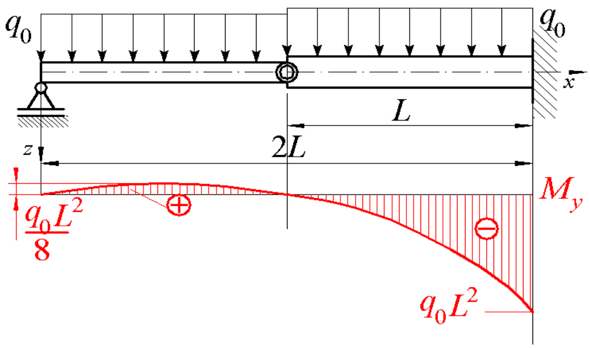
Za desni dio nosača koristimo suprotno usmjerenu silu F_{B} prema principu akcije i reakcije pa izračunavamo reakcije u osloncu C, kako su prikazane na slici 8.16.

$$\begin{gathered}\sum F_z = 0 \Rightarrow F_{\mathrm{C}} = q_0 \frac{L}{2} + F_{\mathrm{B}} \Rightarrow F_{\mathrm{C}} = q_0 \frac{3L}{4}, \\ \sum M_{\mathrm{C}} = 0 \Rightarrow M_{\mathrm{C}} = F_B \frac{L}{2} + q_0 \frac{L}{2} \frac{L}{4} \Rightarrow M_{\mathrm{C}} = q_0 \frac{L^2}{4}.\end{gathered} \tag{127}$$



Slika 8.16. Ravnoteža desnog dijela grede

Na osnovi reakcija veza, nacrtat ćemo dijagram momenta savijanja koji je prikazan na slici 8.17.



Slika 8.17. Momentni dijagram grede

Nakon izračunate raspodjele opterećenja, tj. momenta savijanja, možemo dimenzionirati nosač. Analogno dimenzioniranju nosača u prethodnom primjeru, rezultati traženja pravokutnog profila prikazani su u tablici 4. Mala je razlika u različitim najvećim vrijednostima momenta savijanja u lijevom i desnom dijelu nosača te različitim momentima tromosti presjeka. Najveći moment savijanja na lijevom dijelu nosača je $(M_{y,\max})^{\mathrm{l}} = 0{,}125 \cdot 2 \cdot 2\,500^2 = 1\,562\,500$ Nmm, a na desnom dijelu nosača $(M_{y,\max})^{\mathrm{d}} = 2 \cdot 2\,500^2 = 12\,500\,000$ Nmm.

Tablica 4. Mjere pravokutnog profila za lijevi dio nosača

h, mm	b, mm	s, mm	I_y, mm^4	$(\sigma_{x,\max})^{l}$, N/mm^2	$(\sigma_{x,\max})^{d}$, N/mm^2	f_s
100	50	5	1 736 667	44,99		7,89

Tablica 5. Mjere pravokutnog profila za desni dio nosača

h, mm	b, mm	s, mm	I_y, mm^4	$(\sigma_{x,\max})^{l}$, N/mm^2	$(\sigma_{x,\max})^{d}$, N/mm^2	f_s
140	70	5	5 021 667		174,25	2,04

Zadani omjer momenta tromosti presjeka lijevog i desnog dijela nosača za prikazane mjere pravokutnih profila nije moguće točno zadovoljiti, već samo približno, pa je omjer $(I_y)^d/(I_y)^l = 2{,}89$. Uz slobodni izbor momenta tromosti svakog dijela moguće je postići bolje iskorištenje presjeka.

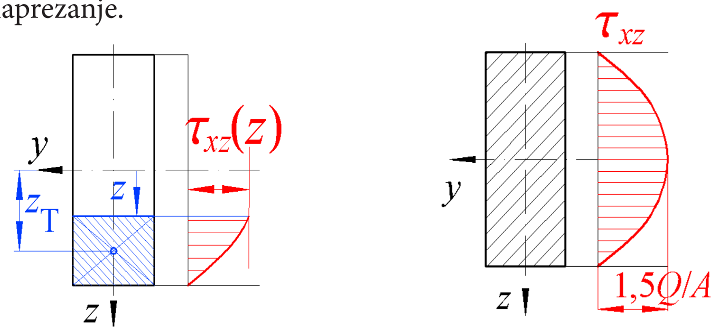
8.3. Posmično naprezanje pri savijanju

Kada postoji poprečna sila na nekom presjeku nosača, ona tada ima djelovanje „odreza" ili smicanja, pa materijal na takvu akciju „reagira" posmičnim naprezanjem u ravnini presjeka. U koordinatnom sustavu dosad korištenom za štapove (nosače) gdje je os x uzdužno, a os z poprečno prema dolje (tj. pozitivan smjer osi z poklapa se sa smjerom gravitacije), u poprečnom presjeku ucrtavamo posmičnu komponentu naprezanja τ_{xz}. Detalje o izvođenju jednadžbe za izračun posmične komponente naprezanja τ_{xz} moguće je vidjeti u literaturi [1]. Jednadžba za izračun τ_{xz} oblika je:

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z S_y}{b I_y}. \tag{128}$$

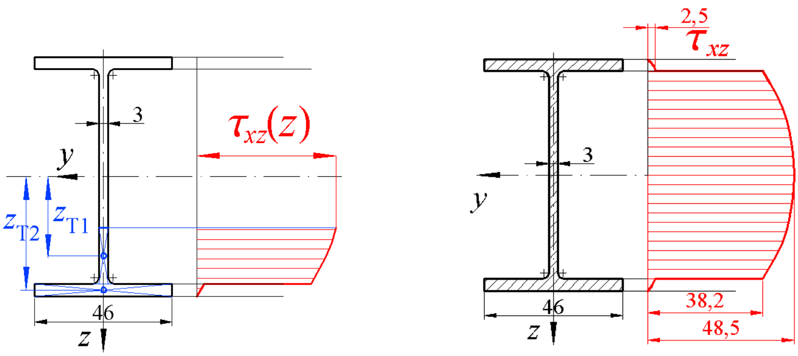
U jednadžbi (128) Q_z je poprečna sila na presjeku, konstanta za taj presjek, S_y je statički moment površine, umnožak ploštine promatrane površine, kako je prikazano na slici 8.18.a), i udaljenosti težišta te površine do osi koja je označena u indeksu, b je širina presjeka na mjestu računanja posmične komponente naprezanja, a I_y je aksijalni težišni moment tromosti presjeka prema osi iz indeksa. Raspodjela posmične komponente naprezanja simbolično je prikazana na slici 8.18.b). Značajno je da se posmična komponenta mijenja od nule na slobodnim površinama nosača, plohi (gornjoj i donjoj), primjerice I profila, te da ima najveću vrijednost u težištu i skokovite promjene na mjestima (visini) skokovite promjene širine profila, kakav ima shematizirani I profil koji crtamo kao 3 pravokutnika. Na slici 8.19.a) prikazan je standardni vruće valjani profil IPE AAA 80.

Iako nema samo 3 pravokutnika kao osnovne dijelove svog presjeka, ima samo postupni prijelaz sa širine pojasnog dijela širine 46 mm na prijelazni radijus širine 3 + 2 x 2 = 7 mm, što je opet skok. Na dijagramu na slici 8.18.b) prikazana je raspodjela posmičnog naprezanja kao da je skok sa širine 46 mm na širinu rebrenog dijela 3 mm. Što je tanji rebreni (uspravni) dio I profila, to je veće posmično naprezanje.



a) *b)*

Slika 8.18. Posmična komponenta naprezanja po pravokutnom presjeku:



a) *b)*

a) statički moment površine i b) raspodjela naprezanja

Slika 8.19. Posmična komponenta naprezanja po I profilu:
a) računanje statičkog momenta površine i τxz, b) raspodjela naprezanja

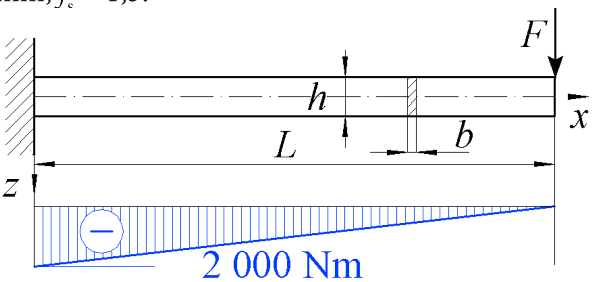
8.4. Optimiranje profila nosača

U mnogim primjerima nosača opterećenje djeluje tako da je raspodjela momenta savijanja promjenjiva po duljini nosača pa je čak u slučajevima grede na dva zglobna oslonca, u osloncima bez sprega, moment savijanja jednak nuli. Dosad smo koristili jednolik presjek za čitav nosač i primijenili uvjet čvrstoće ($\sigma_{x\max} < \sigma_{dop}$) za normalnu komponentu naprezanja u najopterećenijem presjeku kao mjerodavnom za cijeli nosač. Time smo dobili predimenzioniran nosač na nekim mjestima, no ujedno jednostavniji i jeftiniji, jer je vruće valjani profil po kilogramu mase jeftiniji od onog izrađenog nekom od tehnologija preoblikovanja ili spajanja. Međutim, ponekad je presudna masa (težina) nosača pa će stoga na jednom primjeru biti prikazano optimiziranje presjeka, ali ne i tehologičnost izrade takvog presjeka (nosača).

Dodatno, za optimiziranje nosača na svim mjestima, moramo dodati uvjet čvrstoće (zadovoljavanje) posmičnog naprezanja jer na mjestima gdje je moment savijanja jednak nuli ne možemo imati nulti presjek, već moramo kombinirati normalno i posmično naprezanje. Posmično naprezanje je najveće tamo gdje je normalno naprezanje najmanje pa je dovoljan jedan od kriterija za jedan presjek.

Primjer 8.6. Dimenzioniranje konzole

Za nosač prema slici 8.20. treba odrediti optimalnu visinu presjeka pravokutnog profila širine 10 i 20 mm. Materijal nosača je S235. Zadano je: F = 5000 N, L = 300 mm, f_s = 1,5.



Slika 8.20. Konzola s raspodjelom momenta savijanja

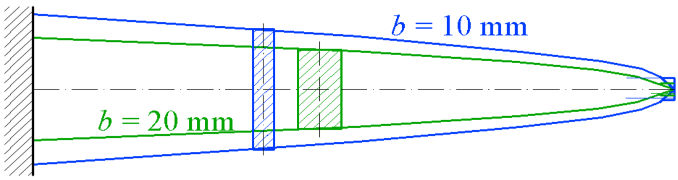
Primjenjujući kriterij normalnog naprezanja, tj. ograničavajući normalnu komponentu naprezanja dopuštenim naprezanjem, dobivamo vrijednost debljine nula na kraju gdje je moment savijanja jednak nuli. Svugdje imamo i poprečnu unutrašnju silu Q_z koja uzrokuje posmično naprezanje τ_{xz} koja je kriterij za dimenzioniranje. Za konačnu mjeru presjeka uzimamo mjere veće od potrebnih za zadovoljavanje uvjeta normalnog i posmičnog naprezanja. To se s odabranom širinom od 10 ili 20 mm svodi na odabir visine kao funkcije položaja. Minimalna visina pravokutnog profila za zadovoljavanje uvjeta normalne i posmične komponente naprezanja određena je sljedećim jednadžbama:

$$
\begin{gathered}
\left|M_y(x)\right| = 5\,000(300 - x) \text{ Nmm},\\
\sigma_{x,\max} = \frac{\left|M_y(x)\right|}{W_y(x)} < \sigma_{\text{dop}} \Rightarrow W_y(x) > \frac{\left|M_y(x)\right|}{\sigma_{\text{dop}}},\\
\frac{bh^2(x)}{6} = \frac{5\,000(300 - x)}{156} \Rightarrow h^{\text{sav}}(x) = \sqrt{\frac{6 \cdot 5\,000(300 - x)}{156b}} \text{ mm},\\
\left|Q_z(x)\right| = 5\,000 \text{ N},\\
\tau_{xz}(z) = \frac{Q_z S_y(z)}{b(z) I_y} < \tau_{\text{dop}} = \frac{\sigma_{\text{dop}}}{2} \to (\tau_{xz})_{\max} = 1{,}5\frac{Q_z}{A},\\
1{,}5\frac{Q_z}{A} < \frac{\sigma_{\text{dop}}}{2} \Rightarrow bh^{\text{pos}}(x) = \frac{3Q_z}{\sigma_{\text{dop}}} \Rightarrow h^{\text{pos}}(x) = \frac{3Q_z}{156b} \text{ mm}.
\end{gathered}
\tag{129}
$$

U jednadžbama (129) uzeta je vrijednost za dopušteno posmično naprezanje prema literaturi [1]. Iz prethodnog primjera uzimamo da je najveća vrijednost posmičnog naprezanja za pravokutni presjek na sredini visine, u težištu, i ima vrijednost 1,5 puta prosječnog naprezanja, izračunatog kao Q_z/A. Rezultate ćemo dalje prikazati kao skup podataka visine za odabranu širinu profila u obliku tablice, a zatim kao krivulje konture u tablici 6. U krajnjem desnom stupcu, s oznakom x = 300 mm, prikazane su visine prema posmičnom naprezanju.

Tablica 6. Kontura (visina h, mm) pravokutnog profila kao funkcija položaja na nosaču

***x*, mm**	**0**	**50**	**100**	**150**	**200**	**250**	**300**
***b* = 10 mm**	77,5	70,7	63,2	54,8	44,7	31,6	10
***b* = 20 mm**	54,8	50	44,7	38,7	31,6	22,4	5



Slika 8.21. Konture konzole s jednolikom čvrstoćom (optimirana visina nosača)

$$h(x) = \max.\begin{cases} h^{\mathrm{sav}}(x) = \sqrt{\dfrac{6 \cdot 5\,000(300 - x)}{156b}} \ \text{mm}, \\ h^{\mathrm{pos}}(x) = \dfrac{3Q_z}{156b} \ \text{mm}. \end{cases} \tag{130}$$

Profil dobiven prema kriteriju prikazan je na slici 8.21. Radi bolje predodžbe, na slučajno odabranim mjestima prikazani su poprečni presjeci za širine od 10 mm i 20 mm, u različitim bojama. Krivulje iznad i ispod simetrale (nosač je simetričan po visini) predstavljaju uvjete prikazane u (130). Ti su uvjeti (nekoliko točaka umjesto funkcije) diskretno prikazani u tablici 6. Vidljivo je da je za vrlo mali dio dominantan kriterij posmičnog naprezanja (na slici prikazan kao pravokutni dio na desnom kraju nosača).

Kazalo pojmova

Popis slika

Popis tablica

Literatura

[1] Alfirević, I.: *Nauka o čvrstoći I*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1995.

[2] Bazjanac, D.: *Nauka o čvrstoći*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1973.

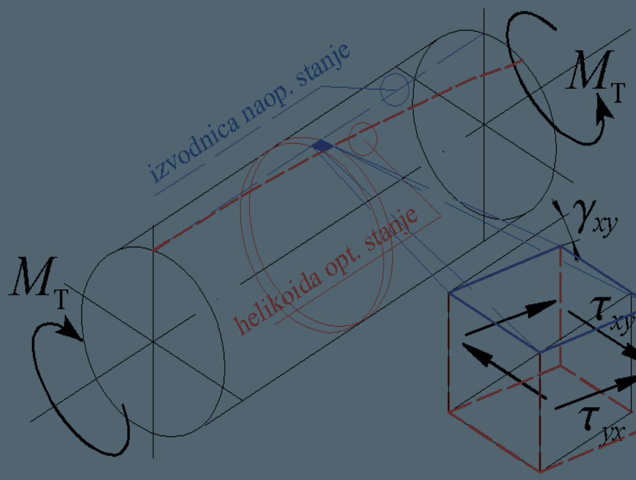
[3] Brčić, V.: *Otpornost materijala*, Građevinska knjiga, Beograd, 1982.

[4] Case, J., Chilver, A. H., Ross, C. T. F.: *Strenght of Materials and Structures*, Butterworth-Heinemann, Oxford, 1984.

[5] Gross, D., Hauger, W., Schnell, W., Wriggers, P.: *Technische Mechanik*, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[6] Grupa autora: *Inženjerski priručnik IP1*, Školska knjiga, Zagreb, 1996.

[7] Šimić, V.: *Otpornost materijala 1*, Školska knjiga, Zagreb, 1992.



izvodnica naop. stanje
M_T
γ_{xy}
M_T
helikoida opt. stanje
τ_{xy}
τ_{yx}